Matemáticas — UNAM Área II

36 reactivos en 3 bloques de 12. Cada uno trae sus 4 opciones: solo una es correcta.

- Tiempo sugerido: **54 minutos** (90 s por reactivo).
- Responde en la **hoja de respuestas** (penúltima página) rellenando el círculo; no escribas en el cuadernillo si quieres reutilizarlo.
- Si dudas, descarta primero las opciones imposibles y avanza: vuelve al final.
- Al terminar, califica con las **claves** y lee la explicación de cada fallo.

Nombre _____ Fecha _____

Hora de inicio _____ Aciertos: ____ de 36

1 Se tienen los números 7/8, $\sqrt{20}$, 0.1212... (el bloque 12 se repite sin fin), π y $\sqrt{49}$. ¿Cuántos de ellos son irracionales?

A) 2
B) 1
C) 3
D) 4

2 Al simplificar $(x^2 - 9)/(x^2 + 6x + 9)$, con $x \neq -3$, se obtiene

A) $-9/(6x + 9)$
B) $(x + 3)/(x - 3)$
C) $(x - 3)/(x + 3)$
D) $(x - 3)/(x + 6)$

3 ¿Qué valores de x cumplen la doble desigualdad $3 < 5 - 2x \leq 11$?

A) $(-3, 1]$
B) $[-3, 1)$
C) $(-1, 3]$
D) $[-1, 3)$

4 Al resolver un sistema 3×3 por la regla de Cramer se obtuvo $D = -4$, $Dx = 12$, $Dy = -8$ y $Dz = 20$, donde D es el determinante de los coeficientes y cada una de las otras se forma cambiando una columna por los términos independientes. ¿Cuánto vale y?

A) −2
B) −3
C) −5
D) 2

5 La función $f(x) = x + 1$ si $x < 3$, y $f(x) = x^2 - 2$ si $x \geq 3$, se dibuja con dos trazos. ¿Qué ocurre en $x = 3$?

A) Es continua, porque f(3) existe y vale 7
B) Tiene una discontinuidad de salto: por la izquierda llega a 4 y por la derecha a 7
C) Tiene una discontinuidad evitable: falta un solo punto y basta con rellenarlo
D) Tiene una asíntota vertical, porque la gráfica se dispara

6 Una rampa para bicicletas se modela como un triángulo rectángulo con catetos de 7 m (vertical) y 24 m (horizontal). Si θ es el ángulo que forma la rampa con el suelo, ¿cuánto vale $\operatorname{sen}\theta$?

A) 7/25
B) 24/25
C) 7/24
D) 25/7

7 ¿Cuál es la asíntota vertical de la gráfica de $y = \log_3(x + 4) - 1$?

A) $x = 4$
B) $y = -1$
C) $x = -1$
D) $x = -4$

8 ¿Qué valor de k hace paralelas las rectas $3x + ky - 7 = 0$ y $6x - 4y + 1 = 0$?

A) $k = 2$
B) $k = 9/2$
C) $k = -2$
D) $k = -9/2$

9 Una circunferencia tiene centro C(1, −2) y radio 5. ¿Cuál de los siguientes puntos queda fuera de ella, es decir, a más de 5 unidades del centro?

A) (6, −5)
B) (4, 2)
C) (−3, 0)
D) (1, 3)

10 Una hipérbola tiene $a = 8$ y $b = 15$. ¿Cuánto vale su excentricidad $e = c/a$?

A) 15/8
B) 17/8
C) $\sqrt{161}/8$
D) 17/15

11 Cuatro curvas obtenidas al cortar un cono con un plano tienen excentricidades 0, 0.6, 1 y 2.3, en ese orden. ¿Qué curvas son?

A) Elipse, circunferencia, parábola e hipérbola
B) Circunferencia, parábola, elipse e hipérbola
C) Circunferencia, elipse, parábola e hipérbola
D) Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola

12 **Para la curva $y = x^2$, la pendiente de la secante que pasa por los puntos con $x = 5$ y $x = 5 + h$ es $10 + h$. ¿Qué se obtiene cuando h se acerca a 0 y qué representa?**

A) 10, el valor de la función en $x = 5$

B) 25, la pendiente de la tangente en $x = 5$

C) 0, la secante se vuelve horizontal

D) 10, la pendiente de la tangente en $x = 5$

13 En el plano complejo, el número $z = -8 + 15i$ es un punto. ¿Cuál es su módulo, es decir, su distancia al origen?

A) 23
B) 17
C) 7
D) $\sqrt{161}$

14 Al dividir $(4x^2)/(x - 5)$ entre $(2x)/(x^2 - 25)$, con $x \neq 0, 5, -5$, el resultado simplificado es

A) $2x(x - 5)$
B) $2x/(x + 5)$
C) $8x^3/[(x - 5)^2(x + 5)]$
D) $2x(x + 5)$

15 En un albergue, la mitad de los animales son perros, un tercio son gatos y los 5 restantes son aves. ¿Cuántos animales hay en total?

A) 30
B) 25
C) 36
D) 15

16 Se resuelve el sistema $x + y + z = 4$, $2x - y - z = 2$, $x - 2y + z = 7$. Al sumar las dos primeras ecuaciones se obtiene x directamente, y después se sustituye y se reduce a un sistema 2×2. ¿Cuánto vale z?

A) 2
B) −1
C) 3
D) 5

17 Un cable colgante de un puente peatonal tiene la forma de la parábola $y = 4x^2 - 16x + 9$, con x y y en metros. ¿En qué punto (x, y) está la parte más baja del cable?

A) (4, −7)
B) (−2, −7)
C) (2, −7)
D) (2, 9)

18 Dos senderos salen de un mismo refugio formando un ángulo de 60°. Un excursionista recorre 9 km por uno y otro 14 km por el otro. ¿A qué distancia en línea recta quedan entre sí?

A) $\sqrt{151}$ km
B) $\sqrt{277}$ km
C) $\sqrt{403}$ km
D) 5 km

19 Se unen A(−2, 5) y B(10, −7). ¿Qué coordenadas tiene el punto P del segmento que cumple AP : PB = 1 : 3, es decir, que queda más cerca de A?

A) (7, −4)
B) (1, 2)
C) (4, −1)
D) (2, 1)

20 Una parábola con vértice en el origen tiene ecuación $x^2 = -24y$. ¿Cuál es su directriz y cuánto mide su lado recto?

A) y = −6; lado recto de 24
B) y = 6; lado recto de 6
C) x = 6; lado recto de 24
D) y = 6; lado recto de 24

21 Una elipse con centro en el origen tiene la ecuación $x^2/289 + y^2/64 = 1$. ¿Cuál es su excentricidad?

A) 15/17
B) 8/17
C) 15/8
D) 225/289

22 Cuando x tiende a 2, f(x) se acerca a 4 y g(x) se acerca a −3. Con los teoremas de límites, ¿cuál es el límite de $[2f(x) - (g(x))^2] / [f(x) + g(x)]$?

A) 17
B) 11
C) −1
D) 1

23 Aplicando la regla de la cadena, ¿cuál es la derivada de $y = \text{sen}(x^3 + 2x)$?

A) $\cos(x^3 + 2x)$
B) $\cos(3x^2 + 2)$
C) $-\cos(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$
D) $\cos(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$

24 ¿Cuál es el resultado de $\int (6/x - 2 \operatorname{sen} x)\, dx$?

A) $6 \ln|x| - 2 \cos x + C$

B) $6 \ln|x| + 2 \cos x + C$

C) $-6/x^2 - 2 \cos x + C$

D) $6 \ln|x| + 2 \operatorname{sen} x + C$

25 Al traducir «el triple del cuadrado de la suma de x y 2, menos cinco veces x» a una expresión algebraica y evaluarla con $x = -3$, ¿qué resultado se obtiene?

A) 54
B) −12
C) 18
D) 24

26 ¿En qué intervalo es decreciente la función $f(x) = x^2 + 10x + 30$?

A) $(-\infty, -5]$
B) $[-5, \infty)$
C) $(-\infty, 5]$
D) $[5, \infty)$

27 En un triángulo, los ángulos A y B miden 40° y 65°, y el lado a, opuesto a A, mide 12 cm. ¿Cuánto mide el lado b, opuesto a B? (sen 40° ≈ 0.643, sen 65° ≈ 0.906, sen 75° ≈ 0.966)

A) ≈ 8.5 cm
B) ≈ 12.8 cm
C) ≈ 18.0 cm
D) ≈ 16.9 cm

28 Para la función $y = -3\,\text{sen}(4x - \pi) + 2$, ¿cuál de las siguientes descripciones es correcta?

A) Amplitud 3, periodo π/2, desfasamiento π a la derecha y rango [−1, 5]
B) Amplitud 3, periodo π/2, desfasamiento π/4 a la derecha y rango [−1, 5]
C) Amplitud 3, periodo 8π, desfasamiento π/4 a la derecha y rango [−1, 5]
D) Amplitud 3, periodo π/2, desfasamiento π/4 a la derecha y rango [−3, 3]

29 La recta $5x + 4y - 40 = 0$ corta a los dos ejes coordenados. ¿Cuánto mide el área del triángulo que forma con ellos?

A) 40 unidades cuadradas
B) 80 unidades cuadradas
C) 18 unidades cuadradas
D) 10 unidades cuadradas

30 Un aspersor riega una zona circular descrita por $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$, con medidas en metros. ¿Cuánto mide el diámetro de la zona regada?

A) 5 m
B) 25 m
C) 10 m
D) $2\sqrt{55}$ m

31 Una elipse tiene la ecuación $(x - 4)^2/16 + (y + 1)^2/25 = 1$. ¿Dónde están sus focos?

A) (7, −1) y (1, −1)
B) (4, 2) y (4, −4)
C) (4, 4) y (4, −6)
D) (−4, 2) y (−4, −4)

32 La ecuación $4x^2 + 25y^2 + 24x - 50y - 39 = 0$ no tiene término xy. Al completar cuadrados, ¿qué curva representa y cuál es su centro?

A) Una elipse con centro en (3, −1)
B) Una circunferencia con centro en (−3, 1)
C) Una elipse con centro en (−6, 1)
D) Una elipse con centro en (−3, 1)

33 ¿Cuál es el límite de $(10x^3 + x)/(4x^3 - 2x^2)$ cuando x tiende a infinito?

A) 2/5
B) 1
C) 5/2
D) ∞

34 Sobre el intervalo cerrado [0, 5], la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ tiene un máximo y un mínimo absolutos. ¿Cuánto vale la diferencia entre ambos?

A) 4
B) 20
C) 16
D) 21

35 Un agricultor tiene 120 m de malla para un corral rectangular dividido en dos partes por una malla paralela a un lado. Así se usan tres tramos de longitud x y dos tramos de longitud y, con $3x + 2y = 120$. ¿Cuál es el área máxima que puede encerrar?

A) 600 m²

B) 900 m²

C) 450 m²

D) 1 200 m²

36 ¿Cuál es el resultado de $\int x \cos x \, dx$, usando integración por partes con $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$?

A) $x \operatorname{sen} x - \cos x + C$

B) $-x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

C) $x \operatorname{sen} x + C$

D) $x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

Hoja de respuestas

Rellena un círculo por reactivo. Matemáticas — UNAM Área II.

1	A	B	C	D	2	A	B	C	D	3	A	B	C	D
4	A	B	C	D	5	A	B	C	D	6	A	B	C	D
7	A	B	C	D	8	A	B	C	D	9	A	B	C	D
10	A	B	C	D	11	A	B	C	D	12	A	B	C	D
13	A	B	C	D	14	A	B	C	D	15	A	B	C	D
16	A	B	C	D	17	A	B	C	D	18	A	B	C	D
19	A	B	C	D	20	A	B	C	D	21	A	B	C	D
22	A	B	C	D	23	A	B	C	D	24	A	B	C	D
25	A	B	C	D	26	A	B	C	D	27	A	B	C	D
28	A	B	C	D	29	A	B	C	D	30	A	B	C	D
31	A	B	C	D	32	A	B	C	D	33	A	B	C	D
34	A	B	C	D	35	A	B	C	D	36	A	B	C	D

Claves y explicaciones

1 **A** 7/8 es una fracción y 0.1212… es periódico (equivale a 4/33): ambos son racionales. $\sqrt{49} = 7$ es un natural. Solo $\sqrt{20}$ (20 no es cuadrado perfecto) y π tienen decimales sin patrón. Son 2 irracionales.

2 **C** Primero se factoriza: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ y $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. Se tacha el factor común $(x + 3)$, no términos sueltos, y queda $(x - 3)/(x + 3)$.

3 **B** Se resta 5 en los tres miembros: $-2 < -2x \leq 6$. Al dividir entre −2 los signos se invierten: $1 > x \geq -3$, es decir, $-3 \leq x < 1$. El extremo 1 queda abierto (con $x = 1$ se obtiene 3, que no es mayor que 3) y −3 queda cerrado (da 11). Intervalo: $[-3, 1)$.

4 **D** En Cramer cada incógnita es el cociente de su determinante entre D: $y = Dy/D = -8/(-4) = 2$. Los valores −3 y −5 corresponden a x y z, que no se pedían.

5 **B** Por la izquierda, $x + 1$ se acerca a $3 + 1 = 4$; por la derecha, $x^2 - 2$ vale $3^2 - 2 = 7$. Los dos lados llegan a alturas distintas, así que hay un salto. Que f(3) exista no basta para ser continua, y no hay hueco ni asíntota.

6 **A** La hipotenusa mide $\sqrt{(7^2 + 24^2)} = \sqrt{625} = 25$. El cateto opuesto a θ es el vertical, de 7 m, y sen θ = CO/H = 7/25. 24/25 sería cos θ; 7/24 es tan θ; 25/7 es csc θ.

7 **D** La gráfica de $\log_3 x$ tiene asíntota vertical en $x = 0$. Al sustituir x por $x + 4$ se desplaza 4 unidades a la izquierda y la asíntota queda donde $x + 4 = 0$, o sea $x = -4$. El −1 solo sube o baja la curva y no mueve la asíntota vertical.

8 **C** Las pendientes son $m_1 = -3/k$ y $m_2 = 6/4 = 3/2$. Paralelas exige $m_1 = m_2$: $-3/k = 3/2$, así que $k = -2$. El valor 9/2 saldría si se pidiera $m_1 \cdot m_2 = -1$ (perpendiculares).

9 **A** Se calcula la distancia al centro. (6, −5): $\sqrt{(25 + 9)} = \sqrt{34} > 5$, fuera. (4, 2): $\sqrt{(9 + 16)} = 5$, sobre la curva. (−3, 0): $\sqrt{(16 + 4)} = \sqrt{20} < 5$, dentro. (1, 3): $\sqrt{(0 + 25)} = 5$, sobre la curva.

10 **B** En la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 225 = 289$, así que $c = 17$ y $e = 17/8$ (mayor que 1, como corresponde). $\sqrt{161}$ saldría de restar, que es la relación de la elipse.

11 **C** La excentricidad separa las cónicas: $e = 0$ es circunferencia; $0 < e < 1$, elipse; $e = 1$, parábola; $e > 1$, hipérbola. Por eso 0, 0.6, 1 y 2.3 corresponden en ese orden a circunferencia, elipse, parábola e hipérbola.

12 **D** Al juntarse el segundo punto con el primero, la secante se convierte en la tangente y su pendiente tiende a $10 + 0 = 10$: es $f'(5)$. El valor de la función en 5 es 25, un dato distinto de la pendiente.

13 **B** El módulo es $\sqrt{(a^2 + b^2)} = \sqrt{(64 + 225)} = \sqrt{289} = 17$. El signo de la parte real no cambia la distancia, y no se suman ni se restan los números sin elevarlos al cuadrado.

14 **D** Se invierte la segunda fracción y se multiplica: $4x^2/(x - 5) \cdot (x^2 - 25)/(2x)$. Como $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, se tachan $(x - 5)$ y una x, y los números 4/2 dan 2: queda $2x(x + 5)$. Sin invertir se llegaría al último resultado.

15 **A** Con x animales: $x/2 + x/3 + 5 = x$. Se multiplica todo por 6: $3x + 2x + 30 = 6x$, de donde $x = 30$. Comprobación: 15 perros, 10 gatos y 5 aves.

16 **C** Primera + segunda: $3x = 6$, así que $x = 2$. Entonces $y + z = 2$ y $-2y + z = 5$ (tercera con $x = 2$). Restando: $3y = -3$, $y = -1$, y $z = 3$. Comprobación en la tercera: $2 + 2 + 3 = 7$. Los valores 2 y −1 son x y y.

17 **C** La parte más baja es el vértice. Su abscisa es $x = -b/(2a) = 16/8 = 2$ y su ordenada $y = 4(4) - 16(2) + 9 = 16 - 32 + 9 = -7$. El punto es (2, −7); el 9 es solo el corte con el eje y.

18 **A** Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos: ley de los cosenos. $c^2 = 9^2 + 14^2 - 2(9)(14) \cos 60° = 81 + 196 - 126 = 151$, así que $c = \sqrt{151} \approx 12.3$ km. $\sqrt{277}$ olvida el término $2ab \cos C$; $\sqrt{403}$ lo suma; 5 sale de usar $\cos 60° = 1$.

19 **B** En la razón 1 : 3, A pesa 3 y B pesa 1: $x = (3 \cdot (-2) + 1 \cdot 10)/4 = 1$ y $y = (3 \cdot 5 + 1 \cdot (-7))/4 = 2$. P(1, 2). (7, −4) estaría cerca de B (razón invertida) y (4, −1) es el punto medio.

20 **D** Como $4p = -24$, $p = -6$. La parábola abre hacia abajo, el foco es (0, −6) y la directriz queda del lado contrario: $y = 6$. El lado recto mide $|4p| = 24$.

21 **A** Aquí $a^2 = 289$ ($a = 17$) y $b^2 = 64$ ($b = 8$). Entonces $c^2 = a^2 - b^2 = 225$ y $c = 15$. La excentricidad es $e = c/a = 15/17$, menor que 1.

22 **C** Numerador: $2(4) - (-3)^2 = 8 - 9 = -1$. Denominador: $4 + (-3) = 1$, que no tiende a 0, así que se puede aplicar el teorema del cociente: $-1/1 = -1$. Elevar −3 al cuadrado da +9, no −9.

23 **D** Afuera: la derivada de sen es cos y lo de adentro no se toca: $\cos(x^3 + 2x)$. Adentro: $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$. Se multiplican ambos: $y' = \cos(x^3 + 2x) \cdot (3x^2 + 2)$. Olvidar el factor interior es el error más común.

24 **B** Se integra término a término: $\int 6/x\, dx = 6 \ln|x|$ y $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x$, de modo que $-2 \text{ sen } x$ se integra como $+2 \cos x$. Resultado: $6 \ln|x| + 2 \cos x + C$. Al derivar se comprueba: $6/x - 2 \text{ sen } x$.

25 **C** La expresión es $3(x + 2)^2 - 5x$. Con $x = -3$: $(-3 + 2)^2 = 1$, así que $3(1) - 5(-3) = 3 + 15 = 18$. Reemplazar $(x + 2)^2$ por $x^2 + 4$ da 54; perder el signo de $-5x$ da −12; elevar al cuadrado el 3 junto con la suma da 24.

26 **A** Se completa el cuadrado: $f(x) = (x + 5)^2 + 5$. El cambio de dirección ocurre en $x = -5$ (la x del vértice, no el 5 de la ordenada). A la izquierda de −5 la curva baja; a la derecha sube. Decrece en $(-\infty, -5]$.

27 **D** Se tienen dos ángulos y un lado: ley de los senos, $a/\text{sen } A = b/\text{sen } B$. Entonces $b = 12 \cdot \text{sen } 65°/\text{sen } 40° \approx 12(0.906)/0.643 \approx 16.9$ cm. El tercer ángulo es 75°; usarlo daría el lado $c \approx 18.0$ cm, y invertir el cociente daría 8.5 cm.

28 **B** Amplitud $|A| = 3$. Periodo $2\pi/B = 2\pi/4 = \pi/2$. Desfasamiento $C/B = \pi/4$ a la derecha (se divide entre B). El centro sube a $D = 2$, así que el rango es $[2 - 3, 2 + 3] = [-1, 5]$. Las otras opciones fallan en el desfasamiento (π sin dividir), en el periodo ($2\pi \cdot 4$) o en el rango (olvida D).

29 **A** Con $x = 0$: $4y = 40$, $y = 10$. Con $y = 0$: $5x = 40$, $x = 8$. Los cortes son (8, 0) y (0, 10) y el triángulo rectángulo tiene catetos 8 y 10: área $= 8 \cdot 10/2 = 40$. Sin el ½ saldrían 80.

30 **C** Se agrupa y se completa: $(x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 4y + 4) = -15 + 36 + 4$, es decir, $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 25$. El centro es (6, −2) y $r = 5$, así que el diámetro es $2r = 10$ m. 5 es solo el radio; 25 es r^2; $2\sqrt{55}$ sale de sumar 15 en vez de restarlo.

31 **B** El centro es (4, −1). El denominador mayor, 25, está bajo y: $a^2 = 25$ y el eje focal es vertical. Entonces $c^2 = 25 - 16 = 9$ y $c = 3$. Los focos están a 3 unidades del centro sobre $x = 4$: $(4, -1 + 3) = (4, 2)$ y $(4, -1 - 3) = (4, -4)$.

32 **D** Se agrupa: $4(x^2 + 6x) + 25(y^2 - 2y) = 39$. Completando: $4(x + 3)^2 + 25(y - 1)^2 = 39 + 36 + 25 = 100$, y al dividir entre 100: $(x + 3)^2/25 + (y - 1)^2/4 = 1$. Es una elipse con centro (−3, 1); los coeficientes de x^2 y y^2 son distintos, así que no es circunferencia.

33 **C** Sustituir da ∞/∞, una forma indeterminada que no vale 1. Se divide numerador y denominador entre la mayor potencia, x^3: $(10 + 1/x^2)/(4 - 2/x)$. Cuando x crece, $1/x^2$ y $2/x$ tienden a 0 y el límite es $10/4 = 5/2$.

34 **B** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$, con puntos críticos $x = 1$ y $x = 3$. Se comparan también los extremos: $f(0) = 1$, $f(1) = 5$, $f(3) = 1$, $f(5) = 21$. El máximo absoluto es 21 (en $x = 5$) y el mínimo es 1: la diferencia es 20.

35 **A** De $3x + 2y = 120$, $y = 60 - 1.5x$. El área es $A = x \cdot y = 60x - 1.5x^2$. Se deriva: $A' = 60 - 3x = 0$, $x = 20$, y entonces $y = 30$. Como $A'' = -3 < 0$ es un máximo. $A = 20 \cdot 30 = 600$ m².

36 **D** Con $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$, se tiene $du = dx$ y $v = \text{sen } x$. Entonces $\int u\, dv = uv - \int v\, du = x \text{ sen } x - \int \text{sen } x\, dx$. Como $\int \text{sen } x\, dx = -\cos x$, queda $x \text{ sen } x + \cos x + C$.