Cálculo diferencial e integral — EXANI-II

36 reactivos en 3 bloques de 12. Cada uno trae sus 3 opciones: solo una es correcta.

- Tiempo sugerido: **58 minutos** (96 s por reactivo).
- Responde en la **hoja de respuestas** (penúltima página) rellenando el círculo; no escribas en el cuadernillo si quieres reutilizarlo.
- Si dudas, descarta primero las opciones imposibles y avanza: vuelve al final.
- Al terminar, califica con las **claves** y lee la explicación de cada fallo.

Nombre _____ Fecha _____

Hora de inicio _____ Aciertos: ____ de 36

1 Cuando x tiende a 4, lím f(x) = 7 y lím g(x) = 0. ¿Qué se puede afirmar de lím [f(x) / g(x)] usando las propiedades de los límites?

A) No se puede usar la propiedad, porque g tiende a 0

B) Vale 0, porque el límite de g es 0

C) Vale 7, porque se ignora el límite de g

2 Calcula lím (x→−1) $(2x^3 - x + 4)$.

A) 7

B) 1

C) 3

3 Deriva f(x) = 3 ln x − 2 sen x.

A) 3/x + 2 cos x

B) 3/x − 2 cos x

C) 1/x − 2 cos x

4 Se traza la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto con x = 3. ¿Cuánto valen la pendiente de la tangente y la altura del punto de tangencia?

A) Pendiente 9 y altura 6

B) Pendiente 6 y altura 9

C) Pendiente 6 y altura 6

5 La posición de un tren es $s(t) = 3t^2 + 2t$ metros, con t en segundos. ¿Cuál es su velocidad en t = 4 s?

A) 56 m/s

B) 14 m/s

C) 26 m/s

6 Una función creciente se aproxima en [1, 5] con 4 rectángulos de igual ancho y altura tomada en el extremo derecho. ¿Cuánto mide cada base y cómo es la suma respecto del área real?

A) Base 1; la suma es mayor que el área real

B) Base 1; la suma es menor que el área real

C) Base 4; la suma es mayor que el área real

7 Obtén $\int x(x + 4)\,dx$.

A) $x^3/3 + 4x^2 + C$

B) $x^3/3 + 2x^2 + C$

C) $(x^2/2)(x^2/2 + 4x) + C$

8 La integral de f de 0 a 3 vale 4. ¿Cuánto vale la integral de 5f(x) de 3 a 0?

A) 20

B) −4

C) −20

9 ¿Qué método conviene para $\int x \cdot e^{(x^2)}\,dx$?

A) Cambio de variable con $u = x^2$, porque $du = 2x\,dx$ ya aparece en el integrando

B) Por partes, porque es un producto de dos factores sin relación entre sí

C) Expandir el producto y luego integrar término a término

10 Una región está limitada arriba por y = 6 y abajo por $y = x^2$, entre x = −1 y x = 1. ¿Qué integral da su área?

A) $\int$ de −1 a 1 de $(x^2 - 6)\,dx$

B) $\int$ de −1 a 1 de $(6 - x^2)\,dx$

C) $\int$ de −1 a 1 de $(6 + x^2)\,dx$

11 En la derivación por definición, ¿qué paso sigue después de dividir [f(x + h) − f(x)] entre h?

A) Hacer que x tienda a 0

B) Evaluar el cociente en h = 1

C) Hacer que h tienda a 0

12 Obtén $\int 1/\sqrt{x}\,dx$.

A) $2\sqrt{x} + C$

B) (2/3)x^(3/2) + C

C) $\ln \sqrt{x} + C$

13 Dos funciones f y g cumplen que, al acercarse x a 3, los valores de f se aproximan a −2 y los de g se aproximan a 5. Con las propiedades de los límites, ¿hacia qué número tiende la expresión $3f(x)^2 - g(x)$?

A) 31
B) 17
C) 7

14 Se deja fija la letra x y se hace que t se acerque a x en el cociente de $t^2 - x^2$ entre $t - x$. Sustituir de golpe produce una forma indeterminada. ¿Hacia qué valor tiende ese cociente?

A) 2x
B) No existe, porque sale 0/0
C) 2t

15 Para $f(x) = x^2$, ¿qué expresión queda al simplificar $[f(x + h) - f(x)]/h$, antes de hacer que h tienda a 0?

A) $2x + h^2$
B) $2x + h$
C) $x + 2h$

16 Una curva está dada por $f(x) = x^2 - 3x$. Se quiere trazar la recta que la toca, sin cruzarla, en el punto de abscisa 2. ¿Cuál es la ecuación de esa recta?

A) $y = -2x + 2$
B) $y = 4x - 10$
C) $y = x - 4$

17 La velocidad de un auto es $v(t) = 4t^2 + 3t$ m/s. ¿Cuál es su aceleración en $t = 2$ s?

A) 19 m/s²
B) 22 m/s²
C) 11 m/s²

18 Para estimar el área bajo $f(x) = x^2$ en el intervalo de 0 a 3 se usan tres rectángulos de la misma base, y la altura de cada uno se toma en el extremo izquierdo de su base. ¿Cuánto suman las áreas de los rectángulos?

A) 14
B) 5
C) 9

19 Obtén $\int (3\sqrt{x} - 2/x^2)\,dx$.

A) 2x^(3/2) − 2/x + C
B) 2x^(3/2) + 2/x + C
C) (3/2)√x + 2/x + C

20 La integral de f de 0 a 2 vale 7 y la integral de f de 2 a 6 vale −3. ¿Cuánto vale la integral de f de 0 a 6?

A) 4
B) 10
C) −4

21 Calcula $\int 6x^2 e^{(x^3)}\,dx$.

A) $6e^{(x^3)} + C$
B) $e^{(x^3)} + C$
C) $2e^{(x^3)} + C$

22 Un tazón se modela girando alrededor del eje horizontal la curva $y = x^2$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Usando discos, ¿cuál es el volumen del sólido generado?

A) $8\pi/3$
B) $64\pi/9$
C) $32\pi/5$

23 Sobre la parábola $y = 3x^2$ se busca el punto donde la recta que la toca sube 18 unidades por cada unidad horizontal. ¿Cuál es su abscisa?

A) En $x = \sqrt{6}$
B) En $x = 3$
C) En $x = 18$

24 Para calcular $\int x \cdot \cos(2x)\,dx$ por partes, ¿qué elección es adecuada?

A) $u = x$ y $dv = \cos(2x)\,dx$
B) $u = \cos(2x)$ y $dv = x\,dx$
C) $u = x \cdot \cos(2x)$ y $dv = dx$

25 Una pareja de funciones tiene, cuando x se acerca a 2, los valores límite 6 para f y −2 para g. Aplicando las propiedades de los límites, ¿a qué valor tiende la fracción con numerador f(x) + 2g(x) y denominador g(x)² − 1?

A) 10/3

B) 2/3

C) −2/5

26 Calcula lím (x→2) (x³ − 8)/(x² − 4).

A) No existe, porque sale 0/0

B) 0

C) 3

27 Para f(x) = 3x² − 5x, ¿cuánto vale lím (h→0) [f(x + h) − f(x)]/h?

A) 6x − 5

B) 6x + 3h − 5

C) 3x − 5

28 Para estudiar qué tan inclinada está la curva y = x³ − 2x² + x justo donde x vale 2, se traza allí su tangente. ¿Qué ecuación tiene esa tangente?

A) y = 2x − 2

B) y = 5x − 8

C) y = 5x + 2

29 Una empresa vende x piezas y su ganancia, en pesos, es G(x) = −2x² + 80x − 150. ¿Cuántas piezas maximizan la ganancia y cuánto vale esa ganancia máxima?

A) 650 piezas; 20 pesos

B) 40 piezas; −150 pesos

C) 20 piezas; 650 pesos

30 Un ingeniero estima la superficie bajo la curva y = x² + 1 entre x = 1 y x = 3. Divide el intervalo en cuatro franjas de igual anchura y levanta cada rectángulo hasta el extremo derecho de su franja. ¿Qué área total obtiene?

A) 12.75

B) 8.75

C) 25.5

31 Obtén ∫ (x + 1)²/x dx, con x > 0.

A) x²/2 + 2x + ln|x| + C

B) x²/2 + ln|x| + C

C) x²/2 + 2x − 1/x + C

32 La integral de f de 0 a 6 vale 14, la de f de 4 a 6 vale 5 y la de g de 0 a 4 vale −2. ¿Cuánto vale la integral de 2f(x) − 3g(x) de 0 a 4?

A) 12

B) 24

C) 34

33 Calcula ∫ x·e^(−x) dx.

A) (x − 1)e^(−x) + C

B) −x·e^(−x) + C

C) −(x + 1)e^(−x) + C

34 Una partícula viaja sobre una línea recta con velocidad v(t) = t² − 4t m/s durante seis segundos. ¿Cuántos metros recorre en total, contando también los tramos en que retrocede?

A) 0 m

B) 32/3 m

C) 64/3 m

35 La posición de una partícula es s(t) = t³ − 9t² + 24t metros. ¿En qué instantes se detiene (velocidad cero)?

A) Solo en t = 3 s, donde a(t) = 0

B) En t = 2 s y en t = 4 s

C) En t = 0, porque ahí s(0) = 0

36 Dos caminos se modelan con la recta y = x + 2 y con la parábola y = x². Entre los dos puntos donde se cruzan encierran una región. ¿Cuál es el área de esa región?

A) 9/2

B) −9/2

C) 21/2

Hoja de respuestas

Rellena un círculo por reactivo. Cálculo diferencial e integral — EXANI-II.

1	A	B	C	2	A	B	C	3	A	B	C
4	A	B	C	5	A	B	C	6	A	B	C
7	A	B	C	8	A	B	C	9	A	B	C
10	A	B	C	11	A	B	C	12	A	B	C
13	A	B	C	14	A	B	C	15	A	B	C
16	A	B	C	17	A	B	C	18	A	B	C
19	A	B	C	20	A	B	C	21	A	B	C
22	A	B	C	23	A	B	C	24	A	B	C
25	A	B	C	26	A	B	C	27	A	B	C
28	A	B	C	29	A	B	C	30	A	B	C
31	A	B	C	32	A	B	C	33	A	B	C
34	A	B	C	35	A	B	C	36	A	B	C

Claves y explicaciones

1 **A** La propiedad del cociente pide que el límite del denominador no sea 0. Aquí g tiende a 0, y dividir entre cero no está definido, así que esa propiedad no decide nada: habría que analizar la función por otro camino. No vale 0 ni 7.

2 **C** Es un polinomio, así que basta sustituir: $2(-1)^3 - (-1) + 4 = -2 + 1 + 4 = 3$. El 7 toma $(-1)^3$ como +1 y el 1 resta el término −x en lugar de sumar 1.

3 **B** Las constantes se conservan: $(\ln x)' = 1/x$ y $(\text{sen } x)' = \cos x$. Entonces $f'(x) = 3 \cdot (1/x) - 2 \cos x = 3/x - 2 \cos x$. El segundo resultado cambia el signo del coseno y el tercero pierde el coeficiente 3.

4 **B** La pendiente es la derivada: $f'(x) = 2x$, así que $m = f'(3) = 6$. La altura del punto es el valor de la función: $f(3) = 9$. La tangente es $y - 9 = 6(x - 3)$. f(a) da la altura y f′(a) la inclinación, no al revés.

5 **C** La velocidad es la derivada de la posición: $v(t) = s'(t) = 6t + 2$. En $t = 4$: $6 \cdot 4 + 2 = 26$ m/s. El 56 es la posición s(4) y el 14 resulta de derivar $3t^2$ como 3t.

6 **A** El ancho de cada tramo es $\Delta x = (b - a)/n = (5 - 1)/4 = 1$. Si la función crece, la altura en el extremo derecho es la más alta de cada tramo, así que los rectángulos se pasan del área real: la suma es mayor.

7 **B** Un producto no se integra directo: se expande a $x^2 + 4x$ y se integra término a término. $\int x^2\,dx = x^3/3$ y $\int 4x\,dx = 2x^2$. Resultado: $x^3/3 + 2x^2 + C$. Integrar cada factor por separado y multiplicar es un error, y $4x^2$ olvida dividir entre 2.

8 **C** La constante sale multiplicando: la integral de 5f de 0 a 3 es $5 \cdot 4 = 20$. Al invertir los límites de integración cambia el signo: de 3 a 0 vale −20. El 20 olvida el cambio de signo y el −4 olvida el factor 5.

9 **A** Al elegir $u = x^2$ (lo de adentro), su derivada $du = 2x\,dx$ está en el integrando salvo por un 1/2: queda $\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^{(x^2)} + C$. Por partes se usa cuando los factores no se relacionan, y aquí no hay nada que expandir.

10 **B** El área entre curvas se obtiene integrando la curva de arriba menos la de abajo: $6 - x^2$. Con $(x^2 - 6)$ saldría un valor negativo, y sumar las curvas no mide la separación entre ellas.

11 **C** La definición es un límite: se escribe f(x + h), se resta f(x), se divide entre h y al final se hace que h tienda a 0. La variable que se acerca a cero es h, no x, y h no se sustituye por un valor fijo.

12 **A** Se reescribe la raíz en el denominador como exponente negativo: $1/\sqrt{x} = x^{(-1/2)}$. Se sube el exponente a 1/2 y se divide entre 1/2: $x^{(1/2)}/(1/2) = 2\sqrt{x} + C$. El $(2/3)x^{(3/2)}$ es la integral de $\sqrt{x}$, y el logaritmo solo corresponde a 1/x.

13 **C** Las propiedades permiten sustituir los límites: $3(-2)^2 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$. El 31 eleva al cuadrado el 3f completo $((-6)^2 - 5)$ y el 17 suma el 5 en lugar de restarlo.

14 **A** Al sustituir t = x sale 0/0, que no decide nada, así que se simplifica: $(t - x)(t + x)/(t - x) = t + x$. Con $t \to x$ queda 2x. El 2t no puede ser: t ya se acercó a x.

15 **B** $(x + h)^2 - x^2 = 2xh + h^2$. Al dividir entre h queda $2x + h$. Después, al hacer $h \to 0$, la derivada es 2x. Las otras opciones dividen mal el término h^2 o cambian los coeficientes.

16 **C** $f(2) = 4 - 6 = -2$ y $f'(x) = 2x - 3$, así que $m = f'(2) = 1$. La recta es $y - (-2) = 1(x - 2)$, o sea $y = x - 4$. La opción $y = -2x + 2$ usa m = f(2) y la $y = 4x - 10$ deriva solo x^2.

17 **A** La aceleración es la derivada de la velocidad: $a(t) = v'(t) = 8t + 3$. En $t = 2$: $16 + 3 = 19$ m/s². El 22 es v(2) y el 11 deriva $4t^2$ como 4t.

18 **B** $\Delta x = (3 - 0)/3 = 1$ y los extremos izquierdos son 0, 1 y 2, con alturas 0, 1 y 4. La suma es $(0 + 1 + 4) \cdot 1 = 5$. El 14 usaría los extremos derechos $(1 + 4 + 9)$ y el 9 es el valor exacto del área, por encima de la suma izquierda.

19 **B** Se reescribe: $3x^{(1/2)} - 2x^{(-2)}$. Cada término sube su exponente: $3 \cdot x^{(3/2)}/(3/2) = 2x^{(3/2)}$ y $-2 \cdot x^{(-1)}/(-1) = 2/x$. Resultado: $2x^{(3/2)} + 2/x + C$. La segunda opción pierde un signo y la tercera deriva $\sqrt{x}$ en lugar de integrarla.

20 **A** Los intervalos se pegan: [0, 2] + [2, 6] = [0, 6], así que las integrales se suman: 7 + (−3) = 4. El 10 resta el −3 y el −4 cambia el signo del resultado.

21 **C** Con $u = x^3$ se tiene $du = 3x^2\,dx$, así que $6x^2\,dx = 2\,du$. La integral queda $2\int e^u\,du = 2e^u + C = 2e^{(x^3)} + C$. El $6e^{(x^3)}$ olvida ajustar la constante y el $e^{(x^3)}$ pierde el factor 2.

22 **C** Con discos: $V = \pi \int (\text{radio})^2\,dx = \pi \int$ de 0 a 2 de $(x^2)^2\,dx = \pi \int x^4\,dx = \pi \cdot 32/5 = 32\pi/5$. El $8\pi/3$ olvida elevar al cuadrado el radio y el $64\pi/9$ eleva al cuadrado el resultado de la integral.

23 **B** La pendiente de la tangente es la derivada: $y' = 6x$. Se iguala a 18: $6x = 18$ y $x = 3$. El $\sqrt{6}$ sale de igualar la altura ($3x^2 = 18$) con la pendiente, y el 18 confunde el valor de la pendiente con la posición.

24 **A** Conviene tomar como u lo que se simplifica al derivar (x pasa a 1) y como dv lo que se integra fácil (cos 2x da $\frac{1}{2}$ sen 2x). Con la segunda elección la integral restante sería más complicada, y con la tercera no se separa nada.

25 **B** El límite del denominador es $(-2)^2 - 1 = 3$, distinto de 0, así que se puede aplicar el cociente. Numerador: $6 + 2(-2) = 2$. Resultado: 2/3. El 10/3 toma 2g como +4 y el −2/5 toma g^2 como −4.

26 **C** Al sustituir sale 0/0, que no decide. Se factoriza: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)/[(x - 2)(x + 2)] = (x^2 + 2x + 4)/(x + 2)$. Con $x = 2$: 12/4 = 3. El cero del numerador no basta, porque el denominador también se anula.

27 **A** $f(x + h) - f(x) = 3(2xh + h^2) - 5h = 6xh + 3h^2 - 5h$. Al dividir entre h queda $6x + 3h - 5$, y al hacer $h \to 0$ se obtiene $6x - 5$. La segunda opción olvida tomar el límite y la tercera deriva $3x^2$ como 3x.

28 **B** $f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$ y $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, así que $m = f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5$. La recta es $y - 2 = 5(x - 2)$, es decir, $y = 5x - 8$. La $y = 2x - 2$ usa $m = f(2)$ y la $y = 5x + 2$ suma la altura en lugar de usar punto-pendiente.

29 **C** Se optimiza con $G'(x) = -4x + 80 = 0$, así que $x = 20$. La ganancia máxima es $G(20) = -800 + 1\,600 - 150 = 650$. Hay que distinguir la posición (20 piezas) del valor (650 pesos); el 40 sale de olvidar el 2 al despejar.

30 **A** $\Delta x = (3 - 1)/4 = 0.5$. Los extremos derechos son 1.5, 2, 2.5 y 3, con alturas 3.25, 5, 7.25 y 10, que suman 25.5. Se multiplica por el ancho: $25.5 \times 0.5 = 12.75$. El 8.75 es la suma izquierda y el 25.5 olvida multiplicar por Δx.

31 **A** Se expande y se divide término a término: $(x^2 + 2x + 1)/x = x + 2 + 1/x$. Se integra cada término: $x^2/2 + 2x + \ln|x| + C$. La segunda opción pierde el término cruzado 2x y la tercera integra 1/x con la regla de potencias, que no aplica.

32 **B** Primero, la integral de f de 0 a 4 es $14 - 5 = 9$. Por linealidad: $2 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 18 + 6 = 24$. El 12 trata mal el signo de −3g y el 34 usa 14 en lugar de 9.

33 **C** Por partes: $u = x$, $dv = e^{(-x)}\,dx$, $du = dx$, $v = -e^{(-x)}$. Queda $-x\,e^{(-x)} + \int e^{(-x)}\,dx = -x\,e^{(-x)} - e^{(-x)} + C = -(x + 1)e^{(-x)} + C$. La segunda opción pierde el signo de v y la tercera olvida la integral restante.

34 **C** La velocidad es negativa de 0 a 4 y positiva de 4 a 6. La integral de v de 0 a 6 vale 0 (desplazamiento), pero la distancia usa $|v|$: de 0 a 4 son 32/3 y de 4 a 6 otros 32/3. Total: 64/3 m. El 0 es el desplazamiento y el 32/3 es un solo tramo.

35 **B** La velocidad es $s'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$, que vale 0 en $t = 2$ y $t = 4$. En $t = 3$ es la aceleración la que vale 0, no la velocidad, y $s(0) = 0$ solo dice dónde está la partícula, no si se mueve.

36 **A** Se cruzan donde $x^2 = x + 2$, es decir, en $x = -1$ y $x = 2$. Entre ellos la recta está arriba: área $= \int$ de -1 a 2 de $(x + 2 - x^2)\,dx = [x^2/2 + 2x - x^3/3] = 10/3 + 7/6 = 9/2$. El −9/2 resta al revés y el 21/2 suma las curvas.