# Teorema fundamental del cálculo

Cálculo integral.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

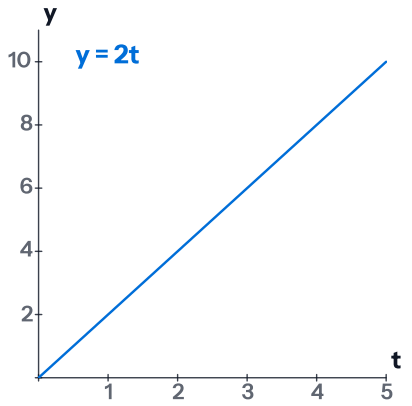
## EJERCICIOS

**1** NIVEL FÁCIL

El área bajo la recta y = 2t, de 0 a x, se llama A(x). ¿Cuánto vale A′(3)?

$$A(x) = \int_0^x 2t\,dt$$

**A)** 6 **B)** 9 **C)** 2



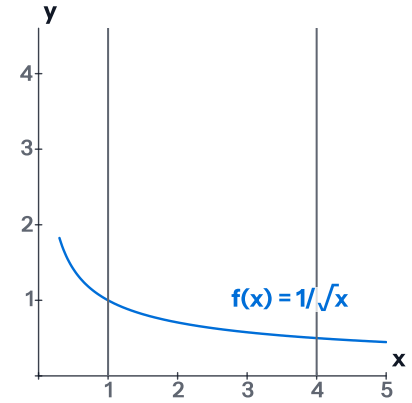

Tu procedimiento

**2** NIVEL FÁCIL

Calcula el valor de la integral definida con el teorema fundamental.

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

**A)** 4 **B)** 2 **C)** 1/2



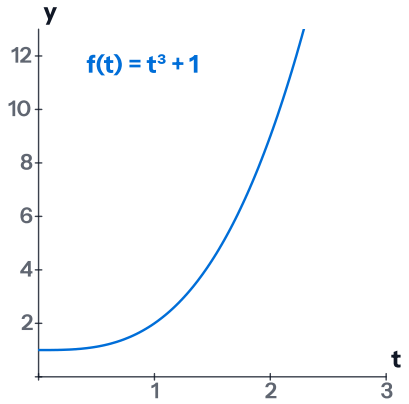

Tu procedimiento

**3** NIVEL FÁCIL

Se define G con una integral. ¿Cuánto vale G′(2)?

$$G(x) = \int_1^x (t^3 + 1)\, dt$$

**A)** 19/4 **B)** 12 **C)** 9



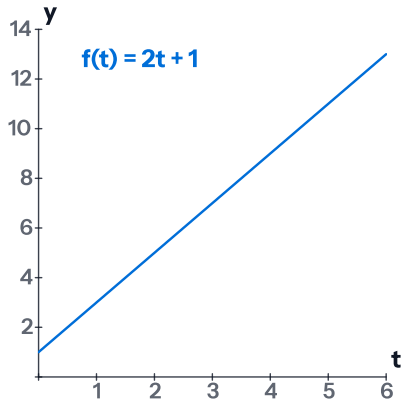

Tu procedimiento

**4** NIVEL MEDIO

El límite superior de la integral es u, igual a x². ¿Cuánto vale F′(2)?

$$u = x^2$$
$$F(x) = \int_0^u (2t + 1)\, dt$$

**A)** 36 **B)** 9 **C)** 20



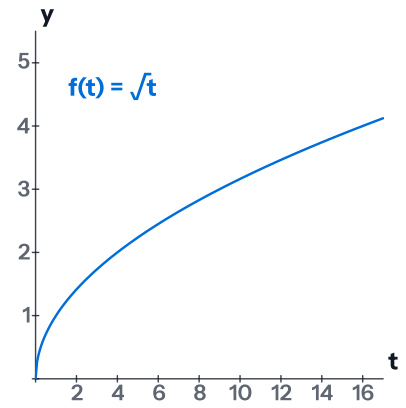

Tu procedimiento

**5** NIVEL MEDIO

Ahora la variable x es el límite inferior. ¿Cuánto vale G′(9)?

$$G(x) = \int_x^{16} \sqrt{t}\, dt$$

**A)** −3 **B)** 3 **C)** 74/3



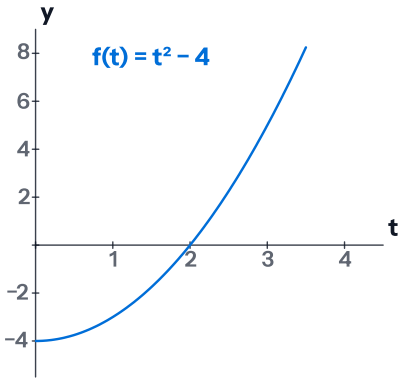

Tu procedimiento

**6** NIVEL MEDIO

Para x ≥ 0, ¿en qué valor de x alcanza A su valor mínimo?

$$A(x) = \int_0^x (t^2 - 4)\, dt$$

**A)** x = 0 **B)** x = 2 **C)** x = 2√3

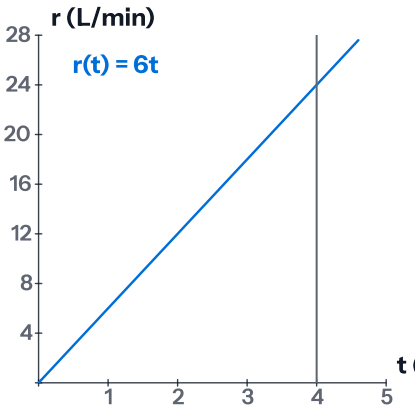



Tu procedimiento

**7** NIVEL MEDIO

**Un tanque tiene 50 litros en t = 0 y recibe agua con rapidez r(t) = 6t litros por minuto. ¿Cuántos litros tiene en t = 4 minutos?**

**A)** 48 litros **B)** 98 litros **C)** 74 litros




Tu procedimiento

**8** NIVEL DIFÍCIL

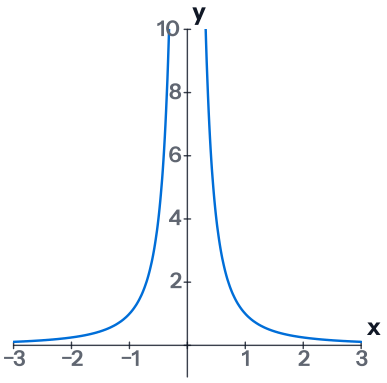
**Un alumno evalúa −1/x de −1 a 1 y obtiene −2. ¿Por qué ese resultado no es válido?**

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

**A)** f no es continua en x = 0: el teorema no se aplica

**B)** La antiderivada de $1/x^2$ es 1/x, no −1/x

**C)** Debía calcular F(−1) − F(1), no F(1) − F(−1)



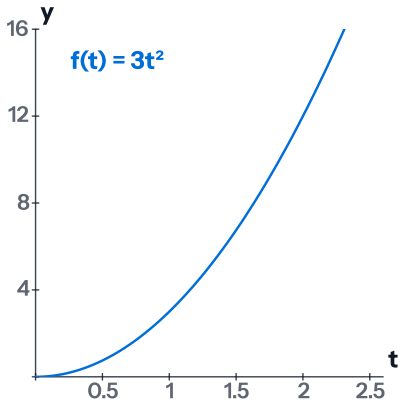

Tu procedimiento

**9** NIVEL DIFÍCIL

Los dos límites dependen de x. ¿Cuánto vale G′(1)?

$$G(x) = \int_x^{2x} 3t^2\, dt$$

**A)** 24 **B)** 9 **C)** 21



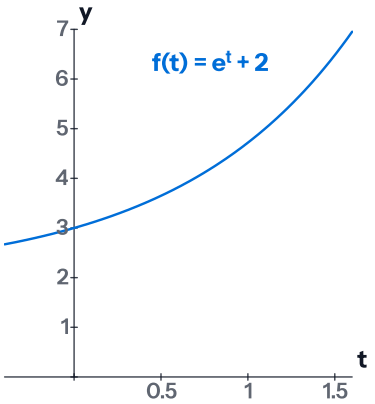

Tu procedimiento

**10** NIVEL DIFÍCIL

¿A qué valor se aproxima la expresión cuando x se acerca a 0?

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (e^t + 2)dt$$

**A)** 1 **B)** 0 **C)** 3




Tu procedimiento

# Claves y paso a paso

### 1. Respuesta A · A′(3) vale 6

1. A(x) es el área acumulada desde 0 hasta x
   $A(3) = 9 \text{ (triángulo)}$
2. Teorema fundamental: la derivada del área es la altura de la curva
   $A'(x) = f(x) = 2x$
3. Comprobación: A(x) = x², cuya derivada es 2x
   $A(x) = x^2$
4. Evalúa la altura en x = 3
   $A'(3) = 2 \cdot 3 = 6$

**Ojo:** 9 es el área A(3), no su rapidez; 2 es la pendiente de la recta, no la altura en x = 3.
**Truco:** La derivada del área acumulada en un punto es la altura de la curva ahí.

### 2. Respuesta B · La integral vale 2

1. Reescribe la raíz como potencia
   $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$
2. Antiderivada: suma 1 al exponente y divide entre el nuevo
   $F(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$
3. Evalúa F en los dos límites
   $F(4) = 2\sqrt{4} = 4$
   $F(1) = 2\sqrt{1} = 2$
4. Resta: F(4) − F(1)
   $4 - 2 = 2$

**Ojo:** 4 olvida restar F(1); 1/2 sale de multiplicar por 1/2 en lugar de dividir entre 1/2 al integrar.
**Truco:** Al integrar una potencia, divide entre el nuevo exponente; si es fracción, multiplica por su inverso.

### 3. Respuesta C · G′(2) vale 9

1. G(x) acumula el área bajo la curva desde 1 hasta x
   $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt$
2. Teorema fundamental: G′(x) es el integrando evaluado en x
   $G'(x) = x^3 + 1$
3. Evalúa en x = 2
   $G'(2) = 2^3 + 1 = 9$

**Ojo:** 19/4 es el valor de G(2), el área; 12 deriva el integrando, f′(2) = 3·2², en lugar de evaluarlo.
**Truco:** Derivar una integral con límite variable: sustituye la variable en el integrando; no hay que integrar.

### 4. Respuesta A · F′(2) vale 36

1. Llama u = x²: en x = 2 el límite superior vale 4
   $u = x^2, \quad u(2) = 4$
2. Teorema fundamental: la derivada respecto a u es el integrando en u
   $\frac{dF}{du} = 2u + 1 = 9$
3. Regla de la cadena: multiplica por la derivada de u
   $\frac{du}{dx} = 2x = 4$
4. Multiplica los dos factores
   $F'(2) = 9 \cdot 4 = 36$

**Ojo:** 9 olvida multiplicar por du/dx; 20 usa f(2)·4 = 5·4, sustituyendo x en lugar de x².
**Truco:** Si el límite es una función de x, multiplica el integrando por la derivada del límite.

### 5. Respuesta A · G′(9) vale −3

1. Invierte los límites: cambia el signo
   $G(x) = -\int_{16}^x \sqrt{t}\,dt$
2. Teorema fundamental: la derivada es menos el integrando
   $G'(x) = -\sqrt{x}$
3. Evalúa en x = 9
   $G'(9) = -\sqrt{9} = -3$

**Ojo:** 3 olvida el signo del límite inferior; 74/3 es el valor de G(9), el área, no su derivada.
**Truco:** Con la variable en el límite inferior, la derivada lleva un signo menos.

### 6. Respuesta B · El mínimo está en x = 2

1. Teorema fundamental: A′(x) es el integrando en x
   $A'(x) = x^2 - 4$
2. Si 0 < x < 2, A′ es negativa: A baja
   $x^2 - 4 < 0$
3. En x = 2, A′ = 0 y cambia de negativa a positiva
   $x^2 - 4 = 0$
   $x = 2$
4. Valor mínimo: el área neta hasta 2
   $A(2) = 8/3 - 8 = -16/3$

**Ojo:** A(0) = 0 es el punto de partida; A también vale 0 en x = 2√3, pero ahí A está subiendo, no es mínimo.
**Truco:** Los extremos de A(x) están donde su derivada, el integrando, cambia de signo.

### 7. Respuesta B · Hay 98 litros

1. El cambio de volumen es la integral de la rapidez
   $V(4) - V(0) = \int_0^4 6t\,dt$
2. Integra y evalúa
   $3t^2\Big|_0^4 = 48 - 0 = 48$
3. Suma el volumen que ya había
   $V(4) = 50 + 48 = 98$

**Ojo:** 48 olvida los 50 litros iniciales; 74 suma 50 más r(4) = 24, usando la rapidez en lugar del área.
**Truco:** Valor final = valor inicial + integral de la rapidez de cambio.

### 8. Respuesta A · f no es continua en x = 0

1. El integrando es positivo: el resultado no puede ser negativo
   $\frac{1}{x^2} > 0$
2. El teorema exige una f continua en todo [−1, 1]
   $f \text{ continua en } [a, b]$
3. En x = 0 la función no existe y se dispara
   $f(0) \text{ no existe}$

**Ojo:** La antiderivada −1/x sí es correcta; invertir el orden F(−1) − F(1) da +2, pero tampoco arregla el problema.
**Truco:** Antes de usar el teorema fundamental, revisa que el integrando sea continuo en el intervalo.

### 9. Respuesta C · G′(1) vale 21

1. Escribe G con una antiderivada H: G(x) = H(2x) − H(x)
   $G(x) = H(2x) - H(x)$
2. Primer término: f(2x) por la derivada de 2x
   $f(2x) \cdot 2 = 24x^2$
3. Segundo término: menos f(x)
   $-f(x) = -3x^2$
4. Suma y evalúa en x = 1
   $G'(x) = 21x^2$
   $G'(1) = 21$

**Ojo:** 24 olvida restar f(x); 9 resta f(2x) − f(x) = 12 − 3 sin multiplicar por la derivada de 2x.
**Truco:** Con dos límites variables: f(límite superior)·(su derivada) − f(límite inferior)·(su derivada).

### 10. Respuesta C · Se aproxima a 3

1. Es una forma 0/0: llama A(x) a la integral, con A(0) = 0
   $\frac{A(x) - A(0)}{x - 0}$
2. Ese cociente es la definición de la derivada A′(0)
   $\lim = A'(0)$
3. Teorema fundamental: A′(0) = f(0)
   $A'(0) = e^0 + 2 = 3$

**Ojo:** 0 sale de tomar la integral nula como si 0/0 fuera 0; 1 usa $e^0$ y olvida el 2 del integrando.
**Truco:** Un cociente como (1/x)·$\int_0^x$ f es la derivada del área en 0: vale f(0).