Regla de la cadena

derivar funciones compuestas: potencias, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Deriva la función. Piensa en una caja de adentro y una de afuera.

$$y = (3x + 2)^4$$

x

$y = u^4$

A) $4(3x + 2)^3$ **B)** $12(3x + 2)^4$ **C)** $12(3x + 2)^3$

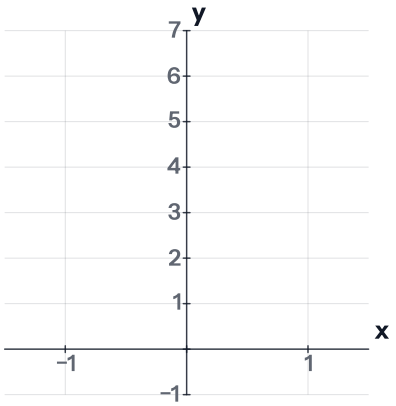
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la derivada de esta función exponencial?

$$y = e^{2x}$$

A) e^{2x} **B)** $2x\, e^{2x-1}$ **C)** $2e^{2x}$



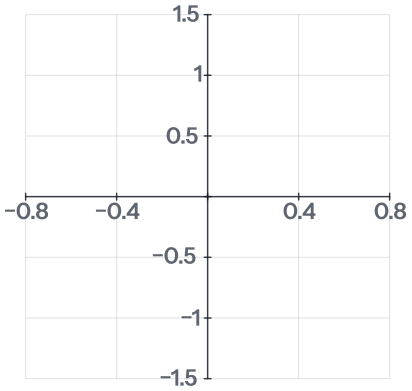
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la derivada de esta función trigonométrica?

$$y = \text{sen}(5x)$$

A) $\cos(5x)$ **B)** $5\cos(5x)$ **C)** $-5\cos(5x)$



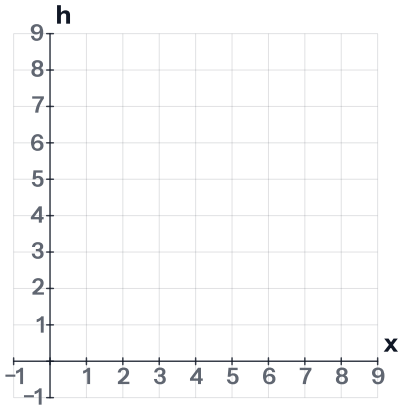
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Sea h la función de la fórmula. ¿Cuál es la pendiente de su recta tangente en x = 4?

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{4}{5}$ **C)** $\frac{8}{5}$



Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

La tabla da valores de g, de g′ y de f′. Sea h la composición f de g. ¿Cuánto vale h′ en x = 2?

$$h(x) = f(g(x))$$

A) -8 **B)** 20 **C)** 2

x	1	2	3
$g(x)$	2	3	1
$g'(x)$	5	4	-3
$f'(x)$	2	5	-2

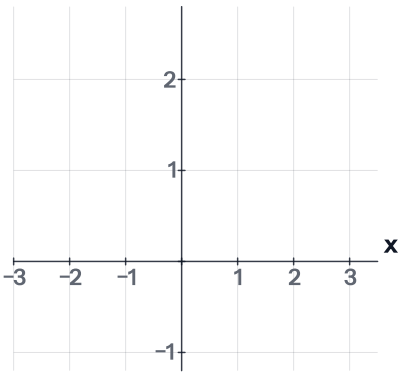
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la derivada de esta función? Compárala después con la gráfica de f.

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

A) 2x/(x² + 1) **B)** 1/(x² + 1) **C)** 2x/(x² + 1)²



Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

El radio de un charco circular, en centímetros, crece con el tiempo t, en segundos. ¿Con qué rapidez crece su área, en cm² por segundo, cuando t = 3?

$$r = 2t$$
$$A = \pi r^2$$

A) 12π **B)** 24π **C)** 72π

t

$A = \pi r^2$

Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Deriva la función. Hay tres funciones encadenadas: cuenta las cajas.

$$y = \operatorname{sen}^2(3x)$$

A) $6\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)$ **B)** $2\operatorname{sen}(3x)\cos(3x)$ **C)** $6\operatorname{sen}(3x)$

x

$y = v^2$

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Deriva la función, encadenando una exponencial, un seno y un cuadrado.

$$y = \exp(\text{sen}(x^2))$$

x

A) $2x\cos(x^2)\exp(\text{sen}(x^2))$ **B)** $\cos(x^2)\exp(\text{sen}(x^2))$

C) $2x\cos(x^2)\exp(\cos(x^2))$

$y = e^v$

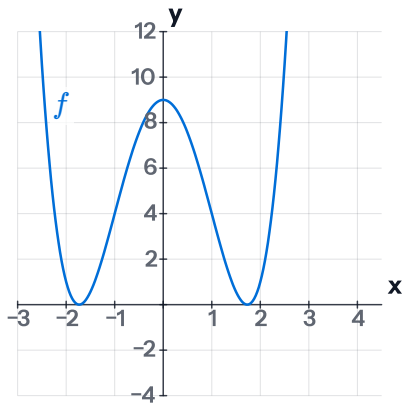
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto donde x = 2?

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

A) $y = 2x - 3$ **B)** $y = 8x - 12$ **C)** $y = 8x - 15$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta C · La derivada es 12(3x + 2)³

1. Identifica la función de adentro y la de afuera
   $u = 3x + 2$
   $y = u^4$
2. Deriva la de afuera, sin tocar lo de adentro
   $\frac{dy}{du} = 4u^3$
3. Deriva la de adentro
   $\frac{du}{dx} = 3$
4. Multiplica las dos derivadas y devuelve u a su valor
   $\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot 3$
   $= 12(3x + 2)^3$

Ojo: 4(3x+2)³ olvida multiplicar por la derivada de adentro; 12(3x+2)⁴ no baja el exponente de la potencia.
Truco: Deriva de afuera hacia adentro y multiplica.

2. Respuesta C · La derivada es 2e^(2x)

1. Adentro está 2x; afuera, la exponencial e a la u
   $u = 2x$
   $y = e^u$
2. La exponencial se deriva a sí misma, así que afuera queda e a la u
   $\frac{dy}{du} = e^u$
3. Multiplica por la derivada de adentro, que es 2
   $u' = 2$
   $y' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$

Ojo: e^(2x) olvida la derivada de adentro; 2x·e^(2x−1) aplica la regla de la potencia a un exponente variable.
Truco: Si el exponente no es x, aparece un factor extra: su derivada.

3. Respuesta B · Cinco veces el coseno de cinco equis

1. Adentro está 5x; afuera, el seno
   $u = 5x$
   $y = \operatorname{sen} u$
2. Deriva el seno, sin tocar lo de adentro
   $\frac{dy}{du} = \cos u$
3. Multiplica por la derivada de adentro, que es 5
   $\frac{du}{dx} = 5$
   $y' = \cos(5x) \cdot 5 = 5\cos(5x)$

Ojo: cos(5x) se queda en la derivada de afuera; −5cos(5x) cambia el signo, que solo ocurre al derivar el coseno.
Truco: La derivada de sen(u) es cos(u) por u′; el signo menos es del coseno.

4. Respuesta B · La pendiente es 4/5

1. Adentro está x² + 9; afuera, la raíz cuadrada
   $u = x^2 + 9$
   $h = \sqrt{u}$
2. Evalúa en x = 4 para ubicar el punto
   $u = 16 + 9 = 25$
   $h = \sqrt{25} = 5$
3. Deriva por capas y multiplica: la raíz cae a 1/(2√u)
   $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x$
   $= x \div \sqrt{x^2 + 9}$
4. Evalúa la derivada en x = 4
   $h'(4) = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Ojo: 1/10 solo deriva la raíz, 1/(2·5); 8/5 olvida el 2 de la raíz y deja 2x/√25.
Truco: La derivada de √u es u′ entre 2√u.

5. Respuesta A · h′(2) vale −8

1. Escribe la regla de la cadena y fíjate en la columna x = 2
   $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
2. Lee g(2): ese valor es el punto donde se evalúa f′
   $g(2) = 3$
3. Lee f′ en 3, no en 2
   $f'(g(2)) = f'(3) = -2$
4. Lee g′(2)
   $g'(2) = 4$
5. Multiplica los dos valores
   $h'(2) = (-2)(4) = -8$

Ojo: 20 usa f′(2) = 5 en vez de f′(3); 2 suma f′(3) y g′(2) en lugar de multiplicarlos.
Truco: Primero evalúa la de adentro; ese resultado es la entrada de la derivada de afuera.

6. Respuesta A · La derivada es 2x/(x² + 1)

1. Adentro está x² + 1; afuera, el logaritmo natural
   $u = x^2 + 1$
   $f = \ln u$
2. Deriva el logaritmo: 1/u, sin tocar lo de adentro
   $\frac{df}{du} = \frac{1}{u}$
   $= 1 \div (x^2 + 1)$
3. Multiplica por la derivada de adentro, 2x
   $f'(x) = \frac{1}{u} \cdot 2x$
   $= 2x \div (x^2 + 1)$
4. Comprueba: donde f toca fondo, f′ vale cero
   $f'(0) = 0 \div (0^2 + 1) = 0$

Ojo: 2x/(x²+1)² eleva el denominador como si fuera un cociente; 1/(x²+1) olvida multiplicar por 2x.
Truco: Para ln(u) la derivada es u′ entre u.

7. Respuesta B · El área crece 24π cm² por segundo

1. Encadena: el tiempo fija el radio y el radio fija el área
   $t \to r = 2t \to A = \pi r^2$
2. Deriva el área respecto al radio
   $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$
3. Deriva el radio respecto al tiempo
   $\frac{dr}{dt} = 2$
4. Multiplica y evalúa en t = 3, donde r = 6
   $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \cdot 2$
   $= 2\pi(6)(2) = 24\pi$

Ojo: 12π olvida multiplicar por dr/dt = 2; 72π multiplica el área, 36π, por 2 en lugar de usar dA/dr.
Truco: Una tasa de cambio compuesta es el producto de las tasas de cada eslabón.

8. Respuesta A · La derivada es 6 sen(3x) cos(3x)

1. Separa las tres cajas: 3x, luego el seno, luego el cuadrado
   $u = 3x, \quad v = \operatorname{sen} u$
   $y = v^2$
2. Deriva la caja de afuera, el cuadrado
   $\frac{dy}{dv} = 2v$
3. Deriva la caja de en medio, el seno
   $\frac{dv}{du} = \cos u$
4. Deriva la caja de adentro, 3x
   $\frac{du}{dx} = 3$
5. Multiplica las tres y devuelve u y v a su valor
   $y' = 2v \cdot \cos u \cdot 3$
   $= 6 \operatorname{sen}(3x) \cos(3x)$

Ojo: 2 sen cos olvida la derivada de 3x; 6 sen(3x) se detiene sin derivar el seno.
Truco: Con n cajas, la derivada lleva n factores.

9. Respuesta A · La derivada es 2x cos(x²) exp(sen(x²))

1. Separa las cajas: x², luego el seno, luego la exponencial
   $u = x^2, \quad v = \operatorname{sen} u$
   $y = e^v$
2. Deriva la de afuera: la exponencial queda igual
   $\frac{dy}{dv} = e^v$
3. Deriva la de en medio: el seno pasa a coseno
   $\frac{dv}{du} = \cos u$
4. Deriva la más interna, x²
   $\frac{du}{dx} = 2x$
5. Multiplica las tres y devuelve u y v a su valor
   $y' = e^v \cdot \cos u \cdot 2x$
   $= 2x \cos(x^2) \exp(\operatorname{sen}(x^2))$

Ojo: Sin 2x se omite la derivada de x²; con e^cos(x²) se deriva también el exponente de e, que no debe tocarse.
Truco: Al derivar e^v, el exponente se queda igual y se multiplica por v′.

10. Respuesta C · La tangente es y = 8x − 15

1. Calcula la altura del punto de tangencia
   $f(2) = (4 - 3)^2 = 1$
2. Deriva con la cadena y evalúa en x = 2 para hallar la pendiente
   $f'(x) = 2(x^2 - 3) \cdot 2x$
   $f'(2) = 2(1)(4) = 8$
3. Usa la forma punto-pendiente y despeja y
   $y - 1 = 8(x - 2)$
   $y = 8x - 15$

Ojo: 2x − 3 omite el factor 2x; 8x − 12 toma 4, el valor de x², como altura del punto.
Truco: Para la tangente necesitas dos cosas: el punto f(a) y la pendiente f′(a).