Puntos de inflexión y concavidad

decidir la concavidad con el signo de la segunda derivada y hallar puntos de inflexión.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

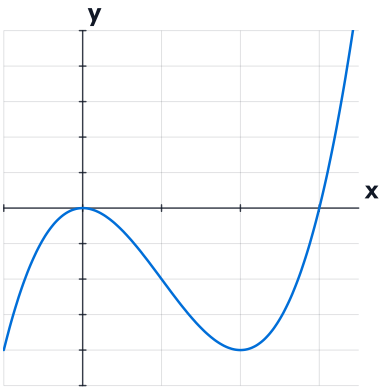
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es el punto de inflexión de la gráfica de la función?

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

A) $(1, -2)$ **B)** $(2, -4)$ **C)** $(0, 0)$



Tu procedimiento

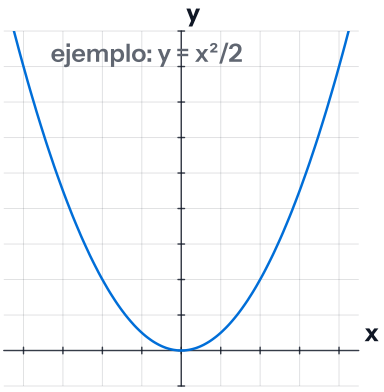
2 NIVEL FÁCIL

En un intervalo se cumple la condición siguiente. ¿Cómo es la gráfica de f en ese intervalo?

$$f''(x) > 0$$

A) Cóncava hacia arriba (como ∪) **B)** Cóncava hacia abajo (como ∩)

C) Creciente en todo el intervalo

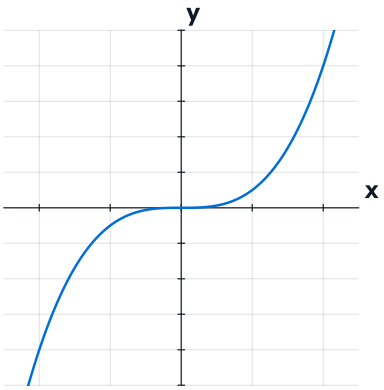


Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿En qué intervalo es la gráfica de la función cóncava hacia abajo?

$$f(x) = x^3$$



A) $(0, \infty)$ **B)** $(-\infty, \infty)$ **C)** $(-\infty, 0)$

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿En qué intervalo es la gráfica de la función cóncava hacia abajo?

$$f(x) = x^4 - 6x^2$$

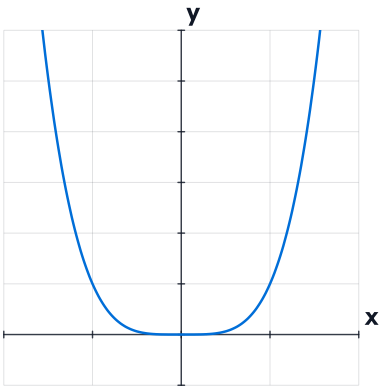
A) $(-1, 1)$ **B)** $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ **C)** $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$

Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

¿Tiene la gráfica de la función un punto de inflexión en x = 0?

$$f(x) = x^4$$



A) Sí, porque f″(0) = 0 **B)** Sí, porque f′(0) = 0 (tangente horizontal)

C) No, porque f″ no cambia de signo

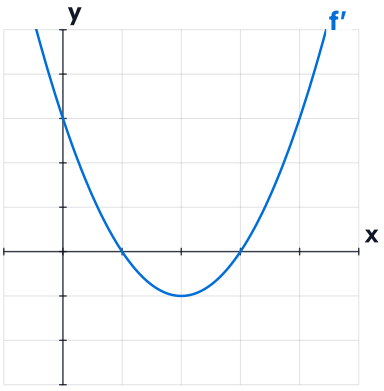
Tu procedimiento

---

6 NIVEL MEDIO

La figura muestra la gráfica de la derivada f′ de una función f. ¿En qué valor de x tiene f un punto de inflexión?

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$



A) $x = 1$ y $x = 3$ **B)** $x = 2$ **C)** $x = -1$

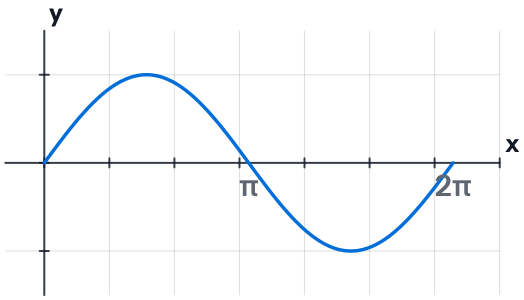
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

¿En cuál de estos intervalos, dentro de [0, 2π], es la gráfica de la función cóncava hacia abajo?

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

A) (π, 2π) **B)** (π/2, 3π/2) **C)** (0, π)



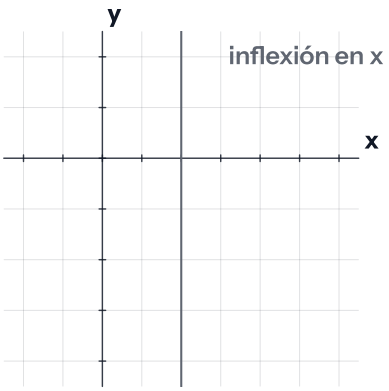
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

La gráfica de la función tiene un punto de inflexión en x = 2. ¿Cuánto vale k?

$$f(x) = x^3 + kx^2$$

A) $k = -6$ **B)** $k = 6$ **C)** $k = -12$



Tu procedimiento

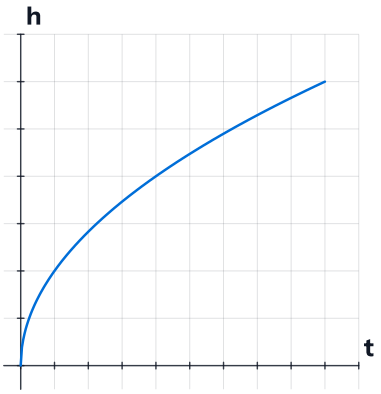
9 NIVEL DIFÍCIL

El nivel h de un depósito, en cm, depende del tiempo t, en minutos. Para t > 0, ¿cómo cambia el nivel?

$$h(t) = 4\sqrt{t}$$

A) Sube, cada vez más rápido **B)** Sube, cada vez más despacio

C) Sube siempre al mismo ritmo



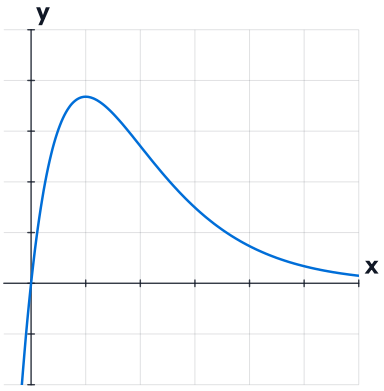
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es el punto de inflexión de la gráfica? Redondea la ordenada a dos decimales.

$$f(x) = x\,e^{-x}$$

A) $(1, 0.37)$ **B)** $(2, 0.27)$ **C)** $(0, 0)$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El punto de inflexión es (1, −2)

1. Deriva dos veces e iguala f″ a cero
   $f'(x) = 3x^2 - 6x$
   $f''(x) = 6x - 6 = 0$
   $x = 1$
2. Comprueba que f″ cambia de signo en x = 1
   $f''(0) = -6 < 0$
   $f''(2) = 6 > 0$
3. Calcula la altura del punto en la gráfica de f
   $f(1) = 1 - 3 = -2$

Ojo: (0, 0) y (2, −4) salen de igualar f′ a cero en vez de f″: son un máximo y un mínimo, no inflexión.
Truco: Inflexión: f″ = 0 y f″ cambia de signo. Después calcula f en ese valor.

2. Respuesta A · Es cóncava hacia arriba

1. f″ es la derivada de f′: dice cómo cambia la pendiente. Mira tangentes de un ejemplo
   $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \text{ crece}$
2. De izquierda a derecha, las pendientes aumentan: −2, 0, 2
   $-2 < 0 < 2$
3. Pendiente creciente significa que la curva se abre como una copa

Ojo: Cóncava hacia abajo invierte el signo de f″; creciente confunde f″ > 0 con f′ > 0: una copa también baja.
Truco: f″ > 0: cóncava hacia arriba (∪). f″ < 0: cóncava hacia abajo (∩).

3. Respuesta C · Es cóncava hacia abajo para x < 0

1. Deriva dos veces: f″ vale cero en x = 0
   $f'(x) = 3x^2$
   $f''(x) = 6x = 0$
   $x = 0$
2. Si x > 0, f″ = 6x es positiva: cóncava hacia arriba
   $x > 0 \Rightarrow f'' > 0$
3. Si x < 0, f″ = 6x es negativa: cóncava hacia abajo
   $x < 0 \Rightarrow f'' < 0$

Ojo: (0, ∞) invierte el signo de f″; (−∞, ∞) ignora que f″ = 6x cambia de signo.
Truco: Resuelve f″ = 0 y prueba el signo de f″ en cada intervalo.

4. Respuesta A · Es cóncava hacia abajo en (−1, 1)

1. Deriva dos veces y halla los ceros de f″: x = −1 y x = 1
   $f''(x) = 12x^2 - 12$
   $= 12(x-1)(x+1)$
2. Prueba un valor en cada intervalo para el signo de f″
   $f''(-2) = 36 > 0$
   $f''(0) = -12 < 0$
   $f''(2) = 36 > 0$
3. f″ > 0: cóncava hacia arriba (∪); f″ < 0: hacia abajo (∩)
   $f'' < 0 \text{ en } (-1, 1)$

Ojo: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ sale de igualar f′ a 0, no f″; la unión de los otros dos intervalos es donde f″ es positiva.
Truco: Tabla de signos: ceros de f″, un valor de prueba por intervalo, y el signo manda.

5. Respuesta C · No hay inflexión en x = 0

1. Deriva dos veces: f″ vale cero en x = 0, pero eso aún no basta
   $f'(x) = 4x^3$
   $f''(x) = 12x^2$
   $f''(0) = 0$
2. Prueba un valor a cada lado de x = 0
   $f''(-1) = 12 > 0$
   $f''(1) = 12 > 0$
3. Sin cambio de signo no hay cambio de concavidad: no es inflexión

Ojo: «f″(0) = 0» exige cambio de signo además; «f′(0) = 0» solo marca un mínimo: ninguna basta para inflexión.
Truco: Para inflexión no basta f″ = 0: f″ debe cambiar de signo.

6. Respuesta B · Tiene inflexión en x = 2

1. f″ es la pendiente de f′: se anula en el vértice de la parábola
   $f''(x) = 2x - 4 = 0$
   $x = 2$
2. A la izquierda f′ baja (f″ < 0); a la derecha f′ sube (f″ > 0)
   $f''(1) = -2 < 0$
   $f''(3) = 2 > 0$
3. f″ cambia de signo en x = 2: ahí hay un punto de inflexión de f

Ojo: 1 y 3 son los ceros de f′, puntos críticos de f; −1 es la altura del vértice de f′, no su posición.
Truco: Inflexión de f = donde f′ tiene un máximo o un mínimo (f″ cambia de signo).

7. Respuesta C · Es cóncava hacia abajo en (0, π)

1. Deriva dos veces: f″ = −sen x, que vale cero en x = 0, π y 2π
   $$f'(x) = \cos x$$
   $$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$
2. En (π, 2π), sen x < 0, así que f″ > 0: cóncava hacia arriba
   $$\operatorname{sen} x < 0 \Rightarrow f'' > 0$$
3. En (0, π), sen x > 0, así que f″ < 0: cóncava hacia abajo
   $$\operatorname{sen} x > 0 \Rightarrow f'' < 0$$

Ojo: (π/2, 3π/2) es donde f decrece, no donde es cóncava hacia abajo; (π, 2π) invierte el signo de f″.

Truco: Concavidad se lee con el signo de f″, no con subir o bajar (el signo de f′).

8. Respuesta A · El valor es k = −6

1. Deriva dos veces: f″ = 6x + 2k
   $$f'(x) = 3x^2 + 2kx$$
   $$f''(x) = 6x + 2k$$
2. En un punto de inflexión f″ = 0: impón x = 2
   $$f''(2) = 12 + 2k = 0$$
   $$k = -6$$
3. Comprueba que f″ cambia de signo en x = 2
   $$f''(x) = 6x - 12$$
   $$f''(1) < 0,\ f''(3) > 0$$

Ojo: k = 6 pierde el signo al despejar; k = −12 sale de derivar kx^2 como kx, sin el 2.

Truco: Plantea $f''(x_0) = 0$, despeja el parámetro y comprueba el cambio de signo.

9. Respuesta B · Sube, pero cada vez más despacio

1. Deriva: h′ es positiva para t > 0, así que el nivel sube
   $$h'(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} > 0$$
2. ¿Con qué rapidez? La pendiente de la tangente va bajando
   $$h'(1) = 2$$
   $$h'(4) = 1$$
   $$h'(9) = \frac{2}{3}$$
3. Lo confirma f″: h″ < 0, la curva es cóncava hacia abajo
   $$h''(t) = -\frac{1}{t\sqrt{t}} < 0$$

Ojo: «Más rápido» exigiría h″ > 0, pero h″ < 0; «mismo ritmo» solo pasa en una recta, con h″ = 0.

Truco: f′ > 0 y f″ < 0: sube cada vez más lento. f′ > 0 y f″ > 0: sube cada vez más rápido.

10. Respuesta B · El punto de inflexión es (2, 0.27)

1. Deriva dos veces con la regla del producto
   $$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$
   $$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$
2. e^{-x} nunca vale 0: f″ = 0 solo en x = 2, y cambia de signo ahí
   $$x - 2 = 0$$
   $$x = 2$$
3. Calcula la ordenada: $f(2) = 2e^{-2} \approx 0.27$
   $$f(2) = 2e^{-2} \approx 0.27$$

Ojo: (1, 0.37) sale de igualar f′ a cero: es el máximo; (0, 0) es donde la gráfica cruza el eje, no una inflexión.

Truco: Resuelve f″ = 0, comprueba el cambio de signo y evalúa f en ese valor.