Propiedades de la integral

usar la linealidad, la aditividad de intervalos, el cambio de límites y la comparación para calcular y acotar integrales.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

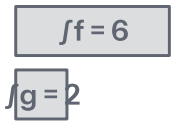
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Con los datos siguientes, ¿cuánto vale la integral de 3f(x) − g(x) entre 0 y 4?

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 6$$
$$\int_0^4 g(x)\,dx = 2$$



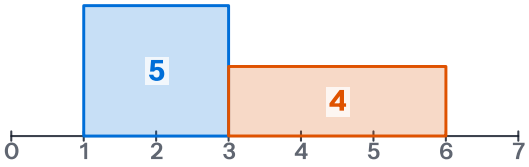
A) 16 **B)** 20 **C)** 12

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Con los datos siguientes, ¿cuánto vale la integral de f entre 1 y 6?

$$\int_1^3 f(x)\,dx = 5$$
$$\int_3^6 f(x)\,dx = 4$$



A) 1 **B)** 20 **C)** 9

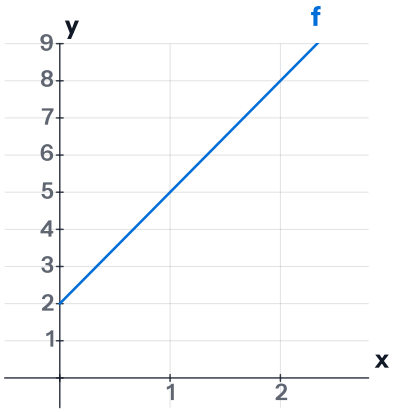
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Sabiendo que la integral de x entre 0 y 2 vale 2, ¿cuánto vale la integral de 3x + 2 entre 0 y 2?

$$\int_0^2 x\,dx = 2$$
$$\int_0^2 (3x+2)\,dx = ?$$

A) 6 **B)** 8 **C)** 10



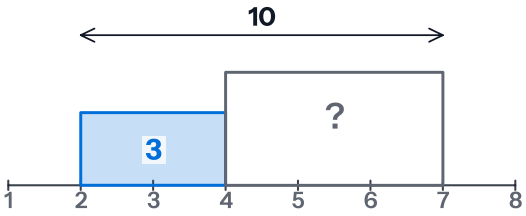
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Con los datos siguientes, ¿cuánto vale la integral de f entre 7 y 4, o sea con el límite superior menor que el inferior?

$$\int_2^7 f(x)\,dx = 10$$
$$\int_2^4 f(x)\,dx = 3$$

A) −7 **B)** 7 **C)** −13

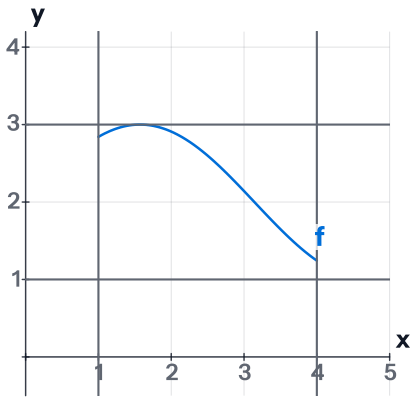


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

En el intervalo [1, 4] se cumple 1 ≤ f(x) ≤ 3. ¿Entre qué valores se garantiza que está la integral de f de 1 a 4?

A) 3 ≤ ∫f ≤ 9 **B)** 1 ≤ ∫f ≤ 3 **C)** 4 ≤ ∫f ≤ 12



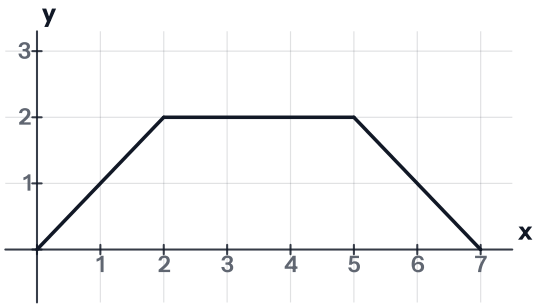
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

f tiene tres tramos rectos, definidos así. Usa áreas y aditividad: ¿cuánto vale la integral de f entre 0 y 7?

$$f(x) = x \quad (0 \le x \le 2)$$
$$f(x) = 2 \quad (2 \le x \le 5)$$
$$f(x) = 7 - x \quad (5 \le x \le 7)$$

A) 14 **B)** 10 **C)** 8



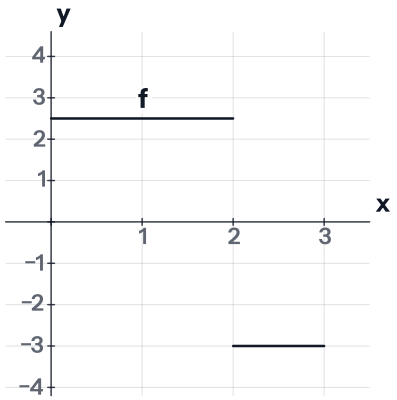
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

La función f es constante por tramos, como se indica. ¿Cuánto vale la integral de f entre 0 y 3?

$$f(x) = 2.5 \quad (0 \le x < 2)$$
$$f(x) = -3 \quad (2 \le x \le 3)$$

A) 8 **B)** 2 **C)** −2



Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Con los datos siguientes, ¿cuánto vale la integral de g(x) − f(x) entre 1 y 5?

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 6$$
$$\int_1^5 (2f(x) + g(x))\,dx = 17$$

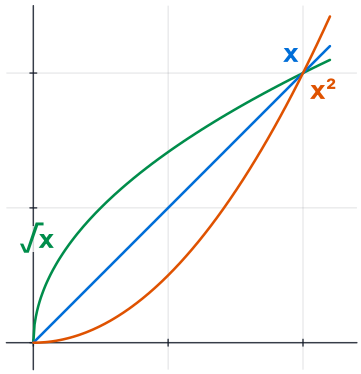
$\int(2f + g) = 17$

A) 1 **B)** 11 **C)** −1

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

En el intervalo [0, 1] se cumple $x^2 \le x \le \sqrt{x}$. Según la propiedad de comparación, ¿cuál es el orden correcto de las tres integrales de 0 a 1?



A) $\int \sqrt{x}\,dx < \int x\,dx < \int x^2\,dx$ **B)** $\int x^2\,dx < \int x\,dx < \int \sqrt{x}\,dx$

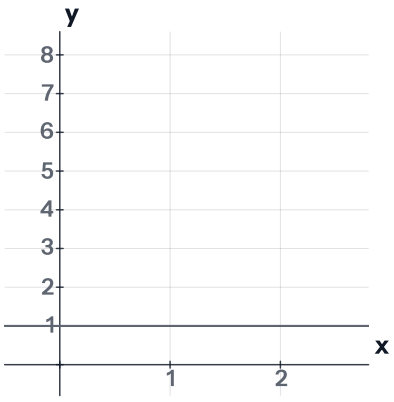
C) $\int x\,dx < \int x^2\,dx < \int \sqrt{x}\,dx$

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Se sabe que la integral de kx + 1 entre 0 y 2 vale 8, y que la integral de x entre 0 y 2 vale 2. ¿Cuánto vale la constante k?

$$\int_0^2 (kx + 1)\,dx = 8$$
$$\int_0^2 x\,dx = 2$$



A) k = 3 **B)** k = 4 **C)** k = 7/2

Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · La integral vale 16

1. Saca la constante 3 de la integral de f
   $\int_0^4 3f\,dx = 3(6) = 18$
2. Resta la integral de g
   $\int_0^4 (3f - g)\,dx = 18 - 2$
3. Calcula
   $18 - 2 = 16$

Ojo: 20 suma ∫g en vez de restarla (18 + 2); 12 multiplica el 3 por (6 − 2) y no solo por ∫f.
Truco: Linealidad: ∫(a·f ± b·g) = a·∫f ± b·∫g.

2. Respuesta C · La integral vale 9

1. Los intervalos se tocan en x = 3
2. La integral de todo el intervalo es la suma
   $\int_1^6 f = \int_1^3 f + \int_3^6 f$
3. Sustituye los valores
   $5 + 4 = 9$

Ojo: 1 resta las dos integrales (5 − 4); 20 las multiplica (5 · 4) en vez de sumarlas.
Truco: Intervalos contiguos: $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$.

3. Respuesta C · La integral vale 10

1. Separa la suma y saca el 3
   $\int_0^2 3x\,dx = 3(2) = 6$
2. La integral de una constante es constante por longitud
   $\int_0^2 2\,dx = 2(2) = 4$
3. Suma los dos resultados
   $6 + 4 = 10$

Ojo: 6 omite la constante; 8 suma solo 2 en lugar de 2 · 2: la integral de una constante lleva la longitud.
Truco: $\int_a^b c\,dx = c\cdot(b - a)$. No basta con sumar la constante.

4. Respuesta A · La integral vale −7

1. Halla la integral de 4 a 7 restando
   $\int_4^7 f = 10 - 3 = 7$
2. Al invertir los límites, cambia el signo
   $\int_7^4 f = -\int_4^7 f$
3. Sustituye
   -7

Ojo: 7 olvida que los límites están invertidos; −13 suma 10 y 3 en lugar de restarlos antes de cambiar el signo.
Truco: $\int_a^b = -\int_b^a$. Al invertir los límites cambia el signo.

5. Respuesta A · La integral está entre 3 y 9

1. Cota inferior: rectángulo de altura 1
   $1 \cdot (4 - 1) = 3$
2. Cota superior: rectángulo de altura 3
   $3 \cdot (4 - 1) = 9$
3. La integral queda entre las dos áreas
   $3 \le \int_1^4 f\,dx \le 9$

Ojo: 1 ≤ ∫ ≤ 3 usa solo las alturas; 4 ≤ ∫ ≤ 12 multiplica por 4 en vez de por 4 − 1.
Truco: m ≤ f ≤ M en [a, b] ⇒ m(b − a) ≤ ∫ f ≤ M(b − a).

6. Respuesta B · La integral vale 10

1. Primer tramo: triángulo
   $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$
2. Segundo tramo: rectángulo
   $3 \cdot 2 = 6$
3. Tercer tramo: otro triángulo
   $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$
4. Suma las tres partes (aditividad)
   $2 + 6 + 2 = 10$

Ojo: 14 toma todo el rectángulo de 7 por 2; 8 olvida el último triángulo y suma solo 2 + 6.
Truco: Parte el intervalo donde cambia la fórmula y suma las integrales de cada tramo.

7. Respuesta B · La integral vale 2

1. Parte el intervalo en x = 2
   $\int_0^3 f = \int_0^2 f + \int_2^3 f$
2. Tramo positivo: área sobre el eje
   $\int_0^2 2.5\,dx = 5$
3. Tramo negativo: la integral lleva signo
   $\int_2^3 (-3)\,dx = -3$
4. Suma con signo
   $5 + (-3) = 2$

Ojo: 8 suma las áreas sin signo (5 + 3); −2 invierte el orden de la resta, 3 − 5.
Truco: La integral cuenta con signo: lo que está bajo el eje x resta.

8. Respuesta C · La integral vale −1

1. Separa la suma y saca el 2
   $2\int f + \int g = 17$
   $2(6) + \int_1^5 g = 17$
2. Despeja la integral de g
   $\int_1^5 g = 17 - 12 = 5$
3. Calcula la integral de g − f
   $\int_1^5 (g - f) = 5 - 6 = -1$

Ojo: 1 invierte el orden de la resta (6 − 5); 11 resta 17 − 6 sin descontar el doble de ∫f.
Truco: Usa linealidad para despejar la integral desconocida, y luego combina.

9. Respuesta B · El orden es de menor a mayor: x², x y √x

1. La menor función tiene la menor área
   $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$
2. La del medio es x
   $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$
3. La mayor función es √x
   $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}$

Ojo: La primera opción invierte todo el orden; la tercera intercambia x y x², pero en [0, 1] se cumple $x^2 \le x$.
Truco: Si f ≤ g en [a, b], entonces ∫f ≤ ∫g: el orden se conserva.

10. Respuesta A · La constante vale k = 3

1. La integral de 1 es la longitud del intervalo
   $\int_0^2 1\,dx = 2$
2. La constante k sale de la integral
   $k\int_0^2 x\,dx = k(2) = 2k$
3. Suma, iguala a 8 y despeja
   $2k + 2 = 8$
   $k = 3$

Ojo: k = 4 ignora que ∫1 = 2 (2k = 8); k = 7/2 toma ∫1 = 1, olvidando la longitud del intervalo.
Truco: Linealidad: saca k, usa los datos y despeja con una ecuación lineal.