Problemas de optimización

plantear una función con una variable y derivarla para hallar el mayor o el menor valor en áreas, volúmenes, costos y distancias.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

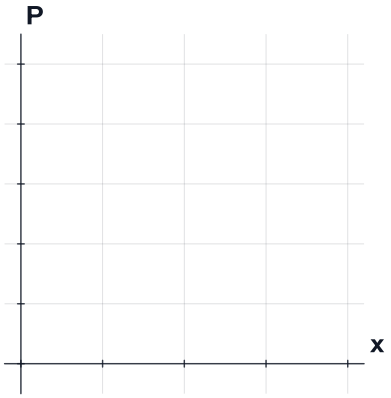
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Dos números positivos suman 20. ¿Cuál es el mayor producto que pueden tener?

A) 100 **B)** 10 **C)** 200



Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Con 60 m de malla se cerca un corral rectangular junto a un muro; el lado del muro no se cerca. ¿Cuál es el área máxima?

A) 400 m² **B)** 225 m² **C)** 450 m²



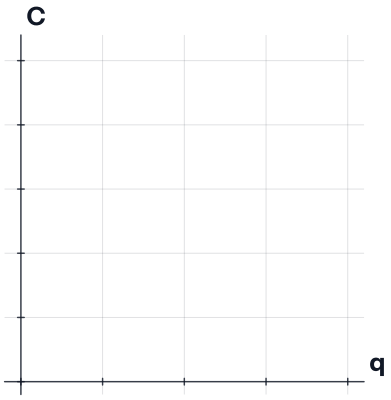
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

El costo de operar una máquina, en pesos por hora, al producir q piezas por hora es C(q). ¿Cuántas piezas por hora dan el costo mínimo?

$$C(q) = q^2 - 40q + 500$$

A) 40 piezas por hora **B)** 20 piezas por hora **C)** 100 piezas por hora

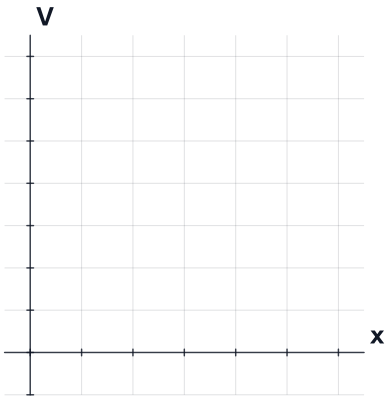


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

De un cartón cuadrado de 12 cm de lado se cortan cuadrados de lado x en las esquinas y se doblan los lados para hacer una caja sin tapa. ¿Qué x da el mayor volumen?

A) 6 cm **B)** 2 cm **C)** 4 cm

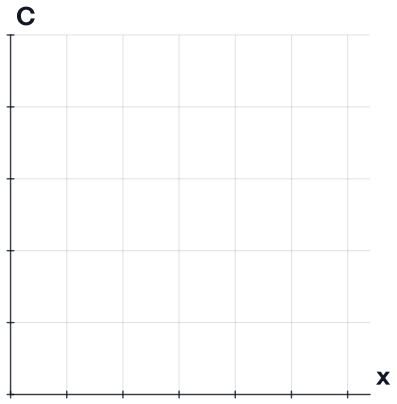


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Se cerca un terreno rectangular de 250 m². El frente cuesta 40 pesos por metro y los otros tres lados, 10 pesos por metro. ¿Cuál es el costo mínimo de la cerca?

A) 1450 pesos **B)** 500 pesos **C)** 1000 pesos



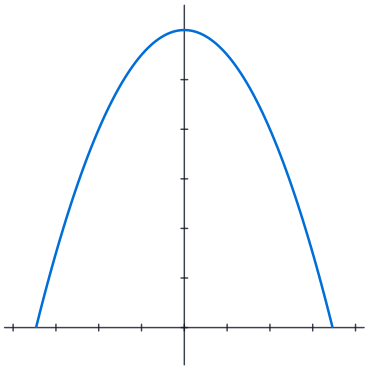
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Un rectángulo simétrico respecto al eje y tiene su base sobre el eje x y los dos vértices superiores en la parábola. ¿Cuál es su área máxima?

$$y = 12 - x^2$$

A) 32 **B)** 16 **C)** 48



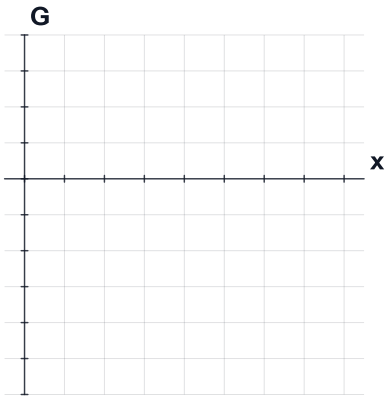
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

La ganancia G, en miles de pesos, al producir x cientos de unidades, con 0 ≤ x ≤ 8, es G(x). ¿Para qué valor de x es máxima?

$$G(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x$$

A) $x = 5$ **B)** $x = 1$ **C)** $x = 3$



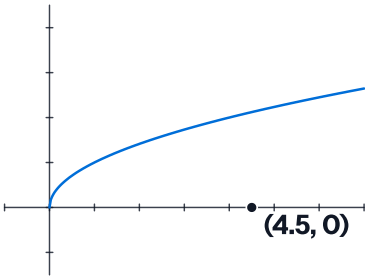
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es el punto de esta curva más cercano al punto (4.5, 0)?

$$y = \sqrt{x}$$

A) $(2.25, 1.5)$ **B)** $(4, 2)$ **C)** $(5, \sqrt{5})$

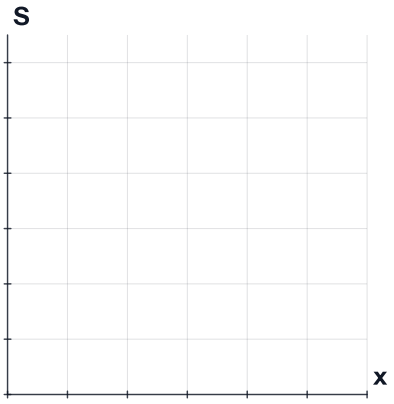


Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una caja sin tapa tiene base cuadrada y volumen de 32 m³. ¿Cuánto mide el lado de la base si se gasta el menor material posible?

A) 4 m **B)** 8 m **C)** 2 m



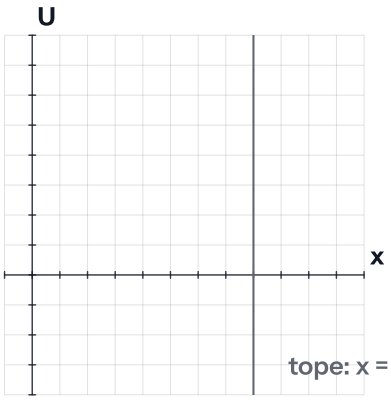
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

La utilidad U, en miles de pesos, al producir x miles de piezas es U(x). Por capacidad, 0 ≤ x ≤ 8. ¿Cuál es la utilidad máxima?

$$U(x) = -2x^2 + 40x - 60$$

A) 140 miles de pesos **B)** 8 miles de pesos **C)** 132 miles de pesos



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El mayor producto es 100

1. Si un número es x, el otro es 20 − x: el producto es P(x)
   $$P(x) = x(20 - x)$$
   $$P(x) = 20x - x^2$$
2. Deriva e iguala a cero para hallar dónde P es máximo
   $$P'(x) = 20 - 2x = 0$$
   $$x = 10$$
3. Calcula el producto con x = 10
   $$P(10) = 10 \cdot 10 = 100$$

Ojo: 10 es el valor de cada número, no del producto; 200 sale de multiplicar 20 por 10, la suma por un número.
Truco: Escribe la cantidad a maximizar con una sola variable, deriva e iguala a cero.

2. Respuesta C · El área máxima es 450 m²

1. Sea x cada lado perpendicular al muro: el lado paralelo mide 60 − 2x
   $$A = x(60 - 2x)$$
   $$A = 60x - 2x^2$$
2. Deriva e iguala a cero
   $$A' = 60 - 4x = 0$$
   $$x = 15$$
3. Calcula el otro lado y el área
   $$60 - 2(15) = 30$$
   $$A = 15 \cdot 30 = 450$$

Ojo: 400 sale de un cuadrado de 20 por 20 (60 ÷ 3); 225 supone cercar los cuatro lados.
Truco: Un lado ya está cubierto por el muro: la malla solo cubre tres lados.

3. Respuesta B · Son 20 piezas por hora

1. Deriva el costo respecto de q
   $$C'(q) = 2q - 40$$
2. Iguala a cero y despeja q
   $$2q - 40 = 0$$
   $$q = 20$$
3. Calcula el costo con q = 20 para comprobar que es el mínimo
   $$C(20) = 400 - 800 + 500$$
   $$C(20) = 100$$

Ojo: 40 sale de derivar q² − 40q como q − 40, sin el 2; 100 es el costo mínimo, no las piezas.
Truco: Lee qué pide el problema: la variable (q) o el valor del costo.

4. Respuesta B · Se debe cortar x = 2 cm

1. Con el corte x, la base mide 12 − 2x de lado y la altura es x
   $$V = x(12 - 2x)^2$$
   $$V = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$
2. Deriva y factoriza: V′ vale 0 en x = 2 y x = 6
   $$V' = 12x^2 - 96x + 144$$
   $$V' = 12(x - 2)(x - 6)$$
3. x = 6 da volumen 0; x = 2 da el máximo
   $$V(2) = 2(8)^2 = 128$$
   $$V(6) = 0$$

Ojo: x = 6 anula la base, con V = 0; x = 4 sale de cortar un tercio del lado y da solo 64.
Truco: Descarta las raíces de V′ que no tienen sentido en el problema (lados nulos o negativos).

5. Respuesta C · El costo mínimo es de 1000 pesos

1. Si el frente mide x, el fondo mide 250 ÷ x; suma el costo de los cuatro lados
   $$C = 40x + 10x + 20y$$
   $$C(x) = 50x + \frac{5000}{x}$$
2. Deriva e iguala a cero
   $$C'(x) = 50 - 5000x^{-2}$$
   $$x^2 = 100$$
   $$x = 10$$
3. Calcula el costo con x = 10
   $$C(10) = 500 + 500$$
   $$C(10) = 1000$$

Ojo: 1450 sale de intercambiar frente y fondo (x = 25); 500 es solo uno de los dos sumandos de C(10).
Truco: Cada lado lleva su precio: el costo se arma sumando precio por longitud de cada lado.

6. Respuesta A · El área máxima es 32

1. Un vértice es (x, 12 − x²): la base mide 2x y la altura 12 − x²
   $$A = (2x)(12 - x^2)$$
   $$A = 24x - 2x^3$$
2. Deriva e iguala a cero
   $$A' = 24 - 6x^2 = 0$$
   $$x^2 = 4$$
   $$x = 2$$
3. Calcula la altura y el área con x = 2
   $$y = 12 - 4 = 8$$
   $$A = 4 \cdot 8 = 32$$

Ojo: 16 olvida que la base mide 2x (usa 2 × 8); 48 usa la altura 12 del vértice en vez de 8.
Truco: Si la figura es simétrica, la base mide 2x: no olvides el factor 2.

7. Respuesta A · La ganancia máxima ocurre en x = 5

1. Deriva y factoriza: G′ vale 0 en x = 1 y x = 5
   $G'(x) = -3x^2 + 18x - 15$
   $G'(x) = -3(x-1)(x-5)$
2. Mira el signo de G′: la ganancia baja, sube y vuelve a bajar
   $G'(0) = -15 < 0$
   $G'(3) = 12 > 0$
   $G'(6) = -15 < 0$
3. Compara con los extremos: el mayor valor es G(5) = 25
   $G(0) = 0$
   $G(8) = -56$

Ojo: x = 1 es un mínimo local, no un máximo; x = 3 promedia 1 y 5, pero ahí G apenas vale 9.
Truco: Revisa el signo de G′ y compara con los extremos del dominio.

8. Respuesta B · El punto más cercano es (4, 2)

1. Minimiza el cuadrado de la distancia d al punto (4.5, 0): $y^2 = x$
   $d^2 = (x-4.5)^2 + y^2$
   $y^2 = x$
   $D = (x-4.5)^2 + x$
2. Deriva e iguala a cero
   $D' = 2(x-4.5) + 1$
   $D' = 2x - 8 = 0$
   $x = 4$
3. Calcula la y del punto en la curva
   $y = \sqrt{4} = 2$

Ojo: (2.25, 1.5) trata y^2 como x^2 al derivar; (5, $\sqrt{5}$) viene de un error de signo: 2(x − 4.5) − 1 = 0.
Truco: Minimiza el cuadrado de la distancia: tiene el mismo mínimo y evita la raíz.

9. Respuesta A · El lado de la base mide 4 m

1. Con lado x y altura h: $x^2h = 32$. La superficie es la base más cuatro caras
   $S = x^2 + 4xh$
   $h = 32/x^2$
   $S(x) = x^2 + 128/x$
2. Deriva e iguala a cero
   $S'(x) = 2x - 128x^{-2}$
   $2x^3 = 128$
   $x^3 = 64$
3. Saca la raíz cúbica y calcula la altura
   $x = 4$
   $h = 32/16 = 2$

Ojo: 8 sale de sacar raíz cuadrada de 64 en vez de cúbica; 2 m es la altura de la caja, no el lado.
Truco: Con $x^3 = k$, saca raíz cúbica. Revisa qué variable pide el problema.

10. Respuesta C · La utilidad máxima es 132 mil pesos

1. Deriva e iguala a cero
   $U'(x) = -4x + 40 = 0$
   $x = 10$
2. x = 10 pasa del tope de 8: queda fuera. En [0, 8], U′ > 0
   $U'(0) = 40 > 0$
   $U'(8) = 8 > 0$
3. La utilidad crece hasta el tope: el máximo está en x = 8
   $U(8) = -128 + 320 - 60$
   $U(8) = 132$

Ojo: 140 ignora el tope de 8 y usa el vértice; 8 sale de evaluar U′(8) en vez de U(8).
Truco: Respeta las restricciones: si el óptimo queda fuera, el máximo está en el borde.