Probabilidad total y teorema de Bayes

Probabilidad total con particiones y teorema de Bayes, con árboles, tablas de conteo y áreas.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

La máquina A produce el 60% de las piezas y la B el 40%. Son defectuosas el 2% de las de A y el 5% de las de B. ¿Probabilidad de que una pieza al azar sea defectuosa?

A) 0.032 **B)** 0.07 **C)** 0.035

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Un dado decide la caja: con 1 o 2, caja 1 (2 rojas, 3 negras); con 3 a 6, caja 2 (4 rojas, 1 negra). Se saca una bola de la caja elegida. ¿Probabilidad de que sea roja?

A) $\frac{3}{5}$ **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{8}{15}$

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Se lanza un dado justo. ¿Cuál de estas listas de eventos es una partición del espacio muestral, es decir, son excluyentes entre sí y juntos cubren todos los resultados?



A) {1, 2, 3}, {3, 4}, {5, 6} **B)** {1, 2}, {3, 4, 5}, {6}

C) {1, 2}, {4, 5}, {6}

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Una escuela tiene 45% de alumnos de 1.°, 35% de 2.° y 20% de 3.°. Reprueban alguna materia el 10%, 20% y 30% de cada grado. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno al azar haya reprobado?

A) 17.5% **B)** 20% **C)** 60%

Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Una enfermedad afecta al 10% de la población. La prueba da positivo en el 80% de los enfermos y en el 5% de los sanos. Con 1000 personas (tabla), si alguien da positivo, ¿probabilidad de que esté enfermo?

A) 80% **B)** 8% **C)** 64%

	Positivo	Negativo	Total
Enfermos			
Sanos			
Total			1000

Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

El 20% de los correos es spam. El filtro marca como spam el 90% de los spam y el 5% de los demás. Un correo llegó marcado. ¿Cuál es la probabilidad de que de verdad sea spam?

A) $\frac{9}{11}$ **B)** $\frac{9}{10}$ **C)** $\frac{9}{50}$

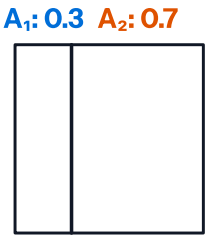
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Los eventos A_1 y A_2 forman una partición. Si ocurrió B, ¿cuál es la probabilidad de que fuera A_1?

$$P(A_1) = 0.3, \quad P(A_2) = 0.7$$
$$P(B \mid A_1) = 0.8$$
$$P(B \mid A_2) = 0.2$$

A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{6}{25}$ **C)** $\frac{12}{19}$



Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Tres productores aportan 50%, 30% y 20% de la fruta de una tienda, con 2%, 3% y 6% de fruta dañada. Si una fruta está dañada, ¿cuál es la probabilidad de que venga del productor 3?

A) $\frac{1}{5}$ **B)** $\frac{12}{31}$ **C)** $\frac{3}{50}$

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

El 20% de una población porta un gen. La prueba detecta al 90% de los portadores y da negativo en el 95% de los no portadores. Con 1000 personas, si alguien sale negativo, ¿probabilidad de que sea portador?

A) $\frac{1}{39}$ **B)** $\frac{1}{10}$ **C)** $\frac{1}{50}$

	Positivo	Negativo	Total
Portadores			
Sanos			
Total			1000

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

De 10 monedas, 9 son justas y 1 está trucada (siempre cae cara). Se elige una al azar y se lanza dos veces: salen dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la trucada?

A) $\frac{1}{10}$ **B)** $\frac{2}{11}$ **C)** $\frac{4}{13}$

Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · La probabilidad es 0.032

1. Primero, de qué máquina viene la pieza: A con 0.6 y B con 0.4
   $P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.4$
2. De cada máquina sale una rama de defectuosa, con su propia probabilidad
   $P(D \mid A) = 0.02$
   $P(D \mid B) = 0.05$
3. Una pieza defectuosa puede venir de dos caminos; multiplica en cada uno
   $0.6 \cdot 0.02 = 0.012$
   $0.4 \cdot 0.05 = 0.020$
4. Los caminos son excluyentes: súmalos para la probabilidad total
   $P(D) = 0.012 + 0.020$
   $= 0.032$

Ojo: Sumar 0.02 y 0.05 da 0.07 e ignora cuánto produce cada máquina. Promediarlas da 0.035: tampoco pondera por 60% y 40%.
Truco: Probabilidad total: suma, sobre todas las causas, (probabilidad de la causa) × (probabilidad del efecto dada esa causa).

2. Respuesta B · La probabilidad es 2/3

1. El dado elige la caja: la 1 con 2 de 6 resultados (1/3) y la 2 con 4 de 6 (2/3)
   $P(C_1) = 1/3$
   $P(C_2) = 2/3$
2. En cada caja, la roja tiene su propia probabilidad
   $P(R \mid C_1) = 2/5$
   $P(R \mid C_2) = 4/5$
3. Roja puede salir por dos caminos; multiplica en cada uno
   $1/3 \cdot 2/5 = 2/15$
   $2/3 \cdot 4/5 = 8/15$
4. Suma los dos caminos
   $P(R) = 2/15 + 8/15$
   $= 10/15 = \frac{2}{3}$

Ojo: Promediar 2/5 y 4/5 da 3/5, pero la caja 2 se usa el doble. El 8/15 es solo el camino de la caja 2.
Truco: Cuando las causas no son igual de probables, cada rama se pesa con la probabilidad de su causa.

3. Respuesta B · La partición es {1, 2}, {3, 4, 5}, {6}

1. Una partición no se traslapa: la lista {1, 2, 3}, {3, 4}, {5, 6} repite el 3, así que no sirve
2. Una partición cubre todo: {1, 2}, {4, 5}, {6} deja fuera el 3, así que tampoco sirve
3. {1, 2}, {3, 4, 5}, {6} reparte los 6 resultados sin repetir ninguno ni dejar fuera ninguno
   $2 + 3 + 1 = 6$

Ojo: Si solo revisas que aparezcan todos, eliges la lista que repite el 3; si solo que no se repitan, la que omite el 3.
Truco: Partición = sin traslapes + sin huecos. Solo así sus probabilidades suman 1.

4. Respuesta A · La probabilidad es 17.5%

1. Partición: 0.45+0.35+0.20 = 1
2. Rama de reprobar de cada grado (G_1, G_2 y G_3 son 1.º, 2.º y 3.º)
   $P(R \mid G_1) = 0.10$
   $P(R \mid G_2) = 0.20$
   $P(R \mid G_3) = 0.30$
3. Multiplica en cada camino
   $0.45 \cdot 0.10 = 0.045$
   $0.35 \cdot 0.20 = 0.070$
   $0.20 \cdot 0.30 = 0.060$
4. Suma los tres caminos
   $0.045 + 0.07 + 0.06 = 0.175$

Ojo: Promediar 10%, 20% y 30% da 20% sin pesar los grupos, que no son iguales. Sumar las tres tasas da 60%.
Truco: Con tres o más causas, la regla es la misma: un camino por causa, multiplicar en cada uno y sumar.

5. Respuesta C · La probabilidad es 64%

1. Del 10% de 1000 hay 100 enfermos, y el 80% de ellos da positivo: 80
   $100 \cdot 0.80 = 80$
2. Quedan 900 sanos, y el 5% da positivo por error: 45
   $900 \cdot 0.05 = 45$
3. Entre los positivos hay 80 + 45 = 125; de ellos, 80 están enfermos
   $P(E \mid +) = 80/125$
   $= \frac{16}{25} = 0.64$

Ojo: El 80% es dar positivo estando enfermo: la pregunta al revés. El 8% es 80 entre 1000, sin acotar a los positivos.
Truco: Bayes con conteos: la parte que cumple ambas condiciones entre todos los que cumplen la condición conocida.

6. Respuesta A · La probabilidad es 9/11

1. Arma el árbol: spam con 0.2 y no spam con 0.8
   $P(S) = 0.2, \quad P(\bar{S}) = 0.8$
2. De cada tipo sale la rama marcado, con la probabilidad dada
   $P(M \mid S) = 0.9$
   $P(M \mid \bar{S}) = 0.05$
3. Un correo marcado viene de dos caminos; multiplica en cada uno
   $0.2 \cdot 0.9 = 0.18$
   $0.8 \cdot 0.05 = 0.04$
4. Bayes: la parte que es spam entre todos los marcados
   $P(S \mid M) = \frac{0.18}{0.22} = \frac{9}{11}$

Ojo: El 9/10 es que un spam sea marcado: al revés de lo pedido. El 9/50 es 0.18 sin dividir entre todos los marcados.
Truco: Teorema de Bayes: P(causa | efecto) = camino de esa causa ÷ suma de todos los caminos que llevan al efecto.

7. Respuesta C · La probabilidad es 12/19

1. La parte de B que cae dentro de A_1 mide 0.3 por 0.8
   $P(A_1 \cap B) = 0.3 \cdot 0.8 = 0.24$
2. La parte de B dentro de A_2 mide 0.7 por 0.2; sumadas, forman toda la probabilidad de B
   $P(A_2 \cap B) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14$
   $P(B) = 0.24 + 0.14 = 0.38$
3. Bayes: de toda la probabilidad de B, la parte que está en A_1
   $P(A_1 \mid B) = 0.24/0.38$
   $= \frac{12}{19}$

Ojo: El 4/5 es P(B | A_1), la dirección contraria. El 6/25 es 0.24, la intersección sin dividir entre la probabilidad de B.
Truco: Bayes se lee en el área: la parte de B dentro de la causa entre toda el área de B.

8. Respuesta B · La probabilidad es 12/31

1. Productores: una partición
   $0.5 + 0.3 + 0.2 = 1$
2. Rama de dañada de cada uno
   $P(D \mid 1) = 0.02$
   $P(D \mid 2) = 0.03$
   $P(D \mid 3) = 0.06$
3. Multiplica en cada camino
   $0.5 \cdot 0.02 = 0.010$
   $0.3 \cdot 0.03 = 0.009$
   $0.2 \cdot 0.06 = 0.012$
4. Bayes: camino 3 entre la suma
   $\frac{0.012}{0.031} = \frac{12}{31}$

Ojo: El 1/5 es la proporción del productor 3 antes de saber que está dañada. El 3/50 es su tasa de daño, la dirección contraria.
Truco: Saber que la fruta está dañada cambia la probabilidad del productor: el que más daña gana peso.

9. Respuesta A · La probabilidad es 1/39

1. Hay 200 portadores; la prueba detecta 180 y falla en 20, que dan negativo
   $200 \cdot 0.90 = 180$
   $200 - 180 = 20$
2. Hay 800 no portadores; el 95% da negativo: 760, y 40 dan positivo
   $800 \cdot 0.95 = 760$
3. Entre los negativos hay 20 + 760 = 780; solo 20 son portadores
   $P(\text{port.} \mid -) = 20/780$
   $= \frac{1}{39}$

Ojo: El 1/10 es dar negativo siendo portador: la pregunta al revés. El 1/50 es 20 entre 1000, sin acotar a los negativos.
Truco: Cambia el total según el dato conocido: aquí es la columna de los negativos, no toda la población.

10. Respuesta C · La probabilidad es 4/13

1. Antes de lanzar: trucada con 1/10 y justa con 9/10
   $P(T) = 1/10$
   $P(J) = 9/10$
2. Dos caras: la trucada siempre las da (1); la justa, 1/2 por 1/2 = 1/4
   $P(CC \mid T) = 1$
   $P(CC \mid J) = 1/4$
3. Dos caras puede venir de dos caminos; multiplica en cada uno
   $1/10 \cdot 1 = 1/10 = 4/40$
   $9/10 \cdot 1/4 = 9/40$
4. Bayes: el camino de la trucada entre la suma de los dos
   $$P(T \mid CC) = \frac{4}{4+9} = \frac{4}{13}$$

Ojo: El 1/10 ignora lo que salió. El 2/11 usa 1/2 en vez de 1/4 para la justa, como si hubiera salido una sola cara.
Truco: Cada dato nuevo actualiza la probabilidad inicial: las dos caras favorecen a la moneda trucada.