# Partición, sumas de Riemann e integrabilidad

dividir un intervalo en una partición, calcular sumas de Riemann con rectángulos y reconocer funciones integrables.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

## EJERCICIOS

**1** NIVEL FÁCIL

El intervalo [1, 7] se divide en 3 subintervalos del mismo ancho. ¿Cuáles son los puntos de la partición, contando los extremos?



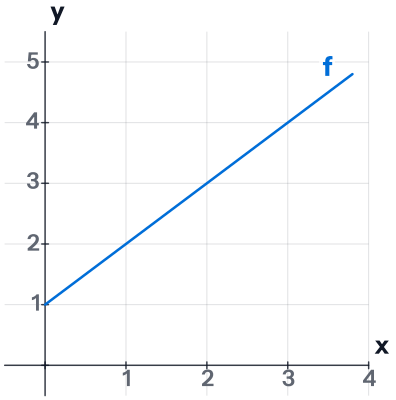

**A)** 1, 3, 5, 7 **B)** 1, 4, 7 **C)** 1, 3, 5

Tu procedimiento

**2** NIVEL FÁCIL

Se aproxima el área bajo f en el intervalo [0, 3] con 3 rectángulos del mismo ancho, con la altura en el extremo derecho de cada subintervalo. ¿Cuánto vale la suma de Riemann?

$$f(x) = x + 1$$




**A)** 6 **B)** 9 **C)** 15/2

Tu procedimiento

**3** NIVEL FÁCIL

Una partición del intervalo [0, 8] tiene los puntos 0, 1, 3, 4 y 8. ¿Cuál es su norma, es decir, la longitud del subintervalo más largo?



**A)** 4 **B)** 2 **C)** 8

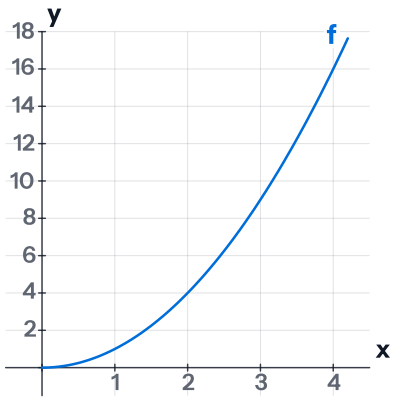
Tu procedimiento

**4** NIVEL MEDIO

Se aproxima el área bajo f en [0, 4] con 2 rectángulos del mismo ancho, con la altura en el punto medio de cada subintervalo. ¿Cuánto vale la suma de Riemann?

$$f(x) = x^2$$

**A)** 8 **B)** 40 **C)** 20



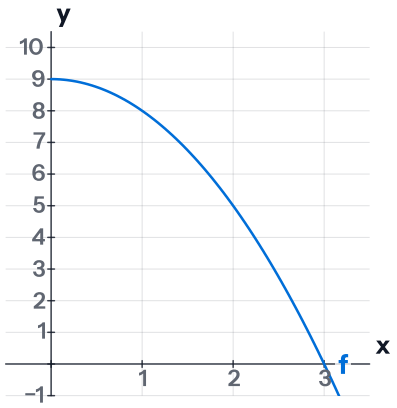

Tu procedimiento

**5** NIVEL MEDIO

Se aproxima el área bajo f en [0, 3] con 3 rectángulos del mismo ancho, con la altura en el extremo izquierdo de cada subintervalo. ¿Cuánto vale la suma de Riemann?

$$f(x) = 9 - x^2$$

**A)** 13 **B)** 22 **C)** 18




Tu procedimiento

**6** NIVEL MEDIO

Se aproxima el área bajo una curva en [2, 8] con rectángulos del mismo ancho, de 1.5 unidades cada uno. ¿Cuántos rectángulos se usan?

**A)** 4 **B)** 6 **C)** 5

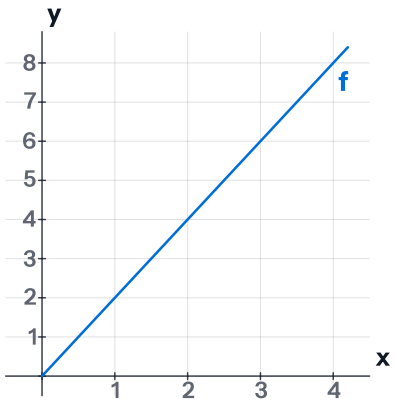


Tu procedimiento

**7** NIVEL MEDIO

Se aproxima el área bajo la recta f en [0, 4] con 4 rectángulos del mismo ancho y la altura en el punto medio. ¿Cuánto vale la suma y cómo se compara con el área exacta?

$$f(x) = 2x$$




**A)** 20; es mayor que el área exacta **B)** 16; es igual al área exacta

**C)** 12; es menor que el área exacta

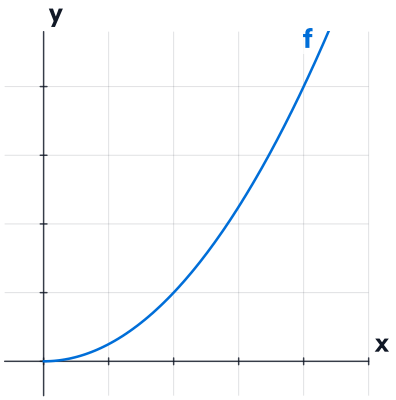
Tu procedimiento

**8** NIVEL DIFÍCIL

Con 4 rectángulos del mismo ancho y la altura en el extremo derecho, se aproxima el área bajo f en [0, 2]. El área exacta es 8/3. ¿Cuánto sobrestima la suma al área exacta?

$$f(x) = x^2$$

**A)** 13/12 **B)** 11/12 **C)** 15/4



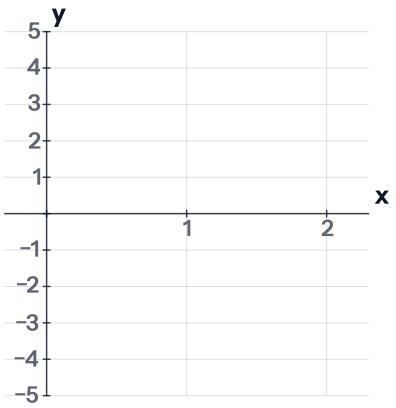

Tu procedimiento

**9** NIVEL DIFÍCIL

Una función es integrable en un intervalo cerrado si está acotada y tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades. ¿Cuál de estas funciones es integrable en [0, 2]?

**A)** f(x) = 1/(x − 1) si x ≠ 1; f(1) = 0 **B)** f(x) = tan x (x en radianes)

**C)** f(x) = x si x < 1; f(x) = 3 si x ≥ 1




Tu procedimiento

**10** NIVEL DIFÍCIL

La tabla da la suma de Riemann con extremo derecho de $f(x) = x^2$ en $[0, 1]$ usando n rectángulos del mismo ancho. ¿A qué valor se acercan las sumas cuando n crece sin límite?

**A)** 1/2 **B)** 1 **C)** 1/3

| n | suma derecha |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 0.625 |
| 10 | 0.385 |
| 100 | 0.338 |

Tu procedimiento

# Claves y paso a paso

### 1. Respuesta **A** · Son cuatro puntos, de 1 a 7 de dos en dos

1. Mide el intervalo completo
   $b - a = 7 - 1 = 6$
2. Divide entre el número de subintervalos
   $\Delta x = 6 \div 3 = 2$
3. Suma delta x a partir de a
   $1,\ 3,\ 5,\ 7$

**Ojo:** 1, 4, 7 reparte en 2 subintervalos (Δx = 3); 1, 3, 5 se detiene antes y omite el extremo 7.
**Truco:** n subintervalos iguales → n + 1 puntos, con Δx = (b − a) ÷ n.

### 2. Respuesta **B** · La suma de Riemann vale 9

1. Ancho y extremos derechos
   $\Delta x = \dfrac{3 - 0}{3} = 1$
2. Altura de cada rectángulo: f en el extremo derecho
   $f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4$
3. Suma altura por ancho
   $(2 + 3 + 4)(1) = 9$

**Ojo:** 6 usa los extremos izquierdos (1 + 2 + 3); 15/2 es el área exacta del trapecio, no una suma de rectángulos.
**Truco:** Derecho: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Izquierdo: $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

### 3. Respuesta **A** · La norma de la partición es 4

1. Mide cada subintervalo
   $1 - 0 = 1,\ 3 - 1 = 2$
   $4 - 3 = 1,\ 8 - 4 = 4$
2. Elige el más largo
3. La norma es 4
   $\|P\| = 4$

**Ojo:** 2 es el ancho promedio (8 ÷ 4 subintervalos); 8 es la longitud de todo el intervalo, no del subintervalo más largo.
**Truco:** Norma = el subintervalo más largo, no el promedio ni el total.

### 4. Respuesta **C** · La suma de Riemann vale 20

1. Divide el intervalo en dos
   $\Delta x = 2$
   $[0, 2]$ y $[2, 4]$
2. Busca el punto medio de cada subintervalo
   $x_1^* = 1,\ x_2^* = 3$
3. Altura en cada punto medio
   $f(1) = 1,\ f(3) = 9$
4. Suma altura por ancho
   $2(1) + 2(9) = 20$

**Ojo:** 8 usa los extremos izquierdos, 2(0 + 4); 40 usa los extremos derechos, 2(4 + 16).
**Truco:** Punto medio: el promedio de los dos extremos del subintervalo.

### 5. Respuesta **B** · La suma de Riemann vale 22

1. Ancho y extremos izquierdos
   $\Delta x = 1$
   $x = 0,\ 1,\ 2$
2. Alturas: f en cada extremo izquierdo
   $f(0) = 9,\ f(1) = 8,\ f(2) = 5$
3. Suma altura por ancho
   $(9 + 8 + 5)(1) = 22$
4. Compara con el área exacta

**Ojo:** 13 usa los extremos derechos, 8 + 5 + 0; 18 es el área exacta, no una suma de rectángulos.
**Truco:** Si f decrece, la suma izquierda sobrestima y la derecha subestima.

### 6. Respuesta **A** · Se usan 4 rectángulos

1. Mide el intervalo
   $b - a = 8 - 2 = 6$
2. Divide entre el ancho de cada rectángulo
   $n = \dfrac{6}{1.5} = 4$
3. No confundas rectángulos con puntos

**Ojo:** 6 es la longitud b − a, no el número de rectángulos; 5 cuenta los puntos de la partición, que son uno más.
**Truco:** n = (b − a) ÷ Δx. Rectángulos = puntos − 1.

### 7. Respuesta B · La suma es 16 y coincide con el área exacta

1. Ancho y puntos medios
   $\Delta x = 1$
   $x^* = 0.5,\ 1.5,\ 2.5,\ 3.5$
2. Alturas: f en cada punto medio
   $f = 1,\ 3,\ 5,\ 7$
3. Suma altura por ancho
   $(1+3+5+7)(1) = 16$
4. Compara con el triángulo bajo la recta
   $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$

**Ojo:** 20 y 12 son las sumas con extremos derechos e izquierdos; ninguna coincide con el área exacta de 16.
**Truco:** Para una recta, el punto medio da exactamente el área; los extremos, no.

### 8. Respuesta A · La suma sobrestima el área en 13/12

1. Ancho 0.5 y alturas en los extremos derechos
   $f(0.5),\ f(1),\ f(1.5),\ f(2)$
   $0.25,\ 1,\ 2.25,\ 4$
2. Suma las áreas de los rectángulos
   $0.5(0.25+1+2.25+4)$
   $= 3.75$
3. Compara con el área exacta
   $\frac{8}{3} \approx 2.67$
4. Resta: suma menos área exacta
   $\frac{45-32}{12} = \frac{13}{12}$

**Ojo:** 11/12 compara el área exacta con la suma izquierda (7/4); 15/4 es la suma misma, no el exceso.
**Truco:** Error = suma de Riemann − área exacta. En f creciente, el extremo derecho sobrestima.

### 9. Respuesta C · Es integrable la función con un salto en x = 1

1. 1/(x − 1) no es acotada
   $x \to 1:\ |f(x)| \to \infty$
2. tan x tampoco: salta al infinito en π/2
3. La función con salto sí es integrable
   $0 \le f(x) \le 3$

**Ojo:** Las otras dos se disparan al infinito (en x = 1 y en x = π/2): no están acotadas, aunque tengan una sola falla.
**Truco:** Acotada + pocas discontinuidades = integrable. Un salto sí; una asíntota no.

### 10. Respuesta C · Las sumas se acercan a 1/3

1. Mira cómo cambian las sumas
2. Fíjate en el último renglón
3. El límite es el área exacta
   $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

**Ojo:** 1 es solo la suma con n = 1; 1/2 sería el área bajo la recta y = x, no bajo la parábola.
**Truco:** Al aumentar n y reducir la norma, la suma de Riemann tiende a la integral.