Parábola como lugar geométrico

parábola: foco, directriz y distancias iguales.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

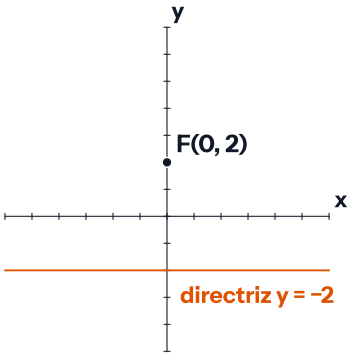
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Una parábola tiene su foco en F(0, 2) y su directriz es la recta y = −2. ¿Cuál es su vértice?

A) (0, 0) **B)** (0, 2) **C)** (0, −2)

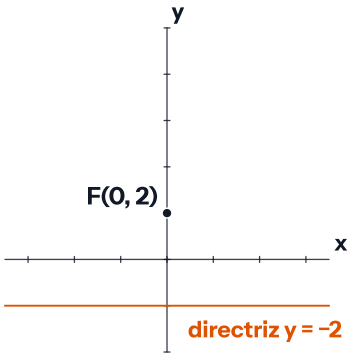


Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

¿Cuál de los puntos está sobre la parábola de foco F(0, 2) y directriz y = −2?

A) (2, 2) **B)** (2, 3) **C)** (4, 2)

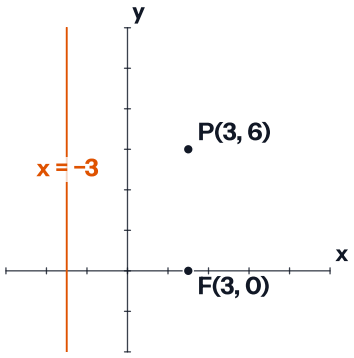


Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

El punto P(3, 6) está sobre la parábola de foco F(3, 0) y directriz x = −3. ¿A qué distancia de la directriz está P?

A) 6 **B)** 3 **C)** 9

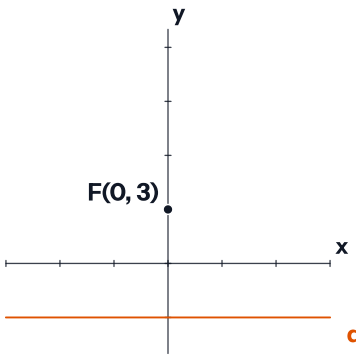


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Una parábola tiene su foco en F(0, 3) y su directriz es la recta y = −3. ¿Cuál es su ecuación?

A) $x^2 = 6y$ **B)** $y^2 = 12x$ **C)** $x^2 = 12y$

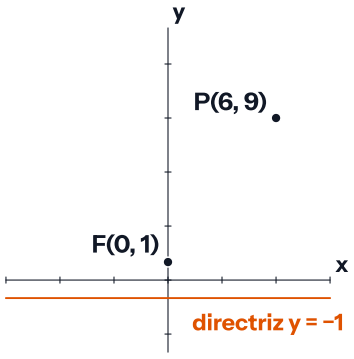


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

El punto P(6, 9) está sobre la parábola de foco F(0, 1) y directriz y = −1. ¿A qué distancia está P del foco?

A) 9 **B)** 10 **C)** 8

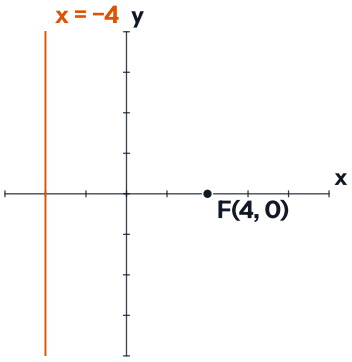


Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Un punto P(1, y) está sobre la parábola de foco F(4, 0) y directriz x = −4. ¿Cuánto vale y?

A) $y = \pm 5$ **B)** $y = \pm\sqrt{34}$ **C)** $y = \pm 4$

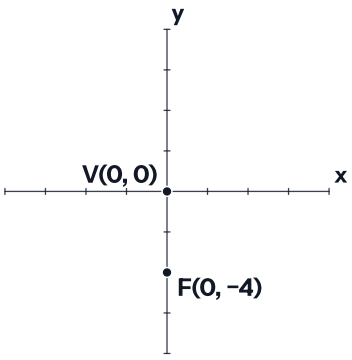


Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Una parábola tiene su vértice en V(0, 0) y su foco en F(0, −4). ¿Cuál es la ecuación de su directriz?

A) $y = 4$ **B)** $y = -4$ **C)** $y = 8$

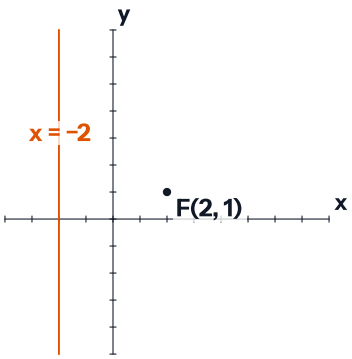


Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Una parábola tiene su foco en F(2, 1) y su directriz es la recta x = −2. ¿Cuál es su ecuación?

A) $(y+1)^2 = 8x$ **B)** $(y-1)^2 = 8x$ **C)** $(y-1)^2 = -8x$

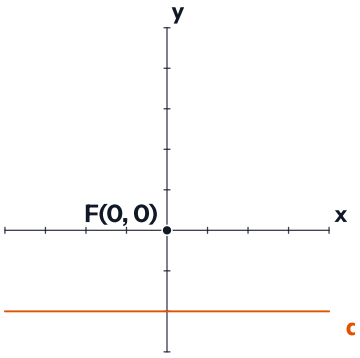


Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una parábola tiene su foco en el origen y su directriz es la recta y = −4. ¿Cuál es su ecuación?

A) $x^2 = 8y - 16$ **B)** $x^2 = 8y + 16$ **C)** $x^2 = 8y$

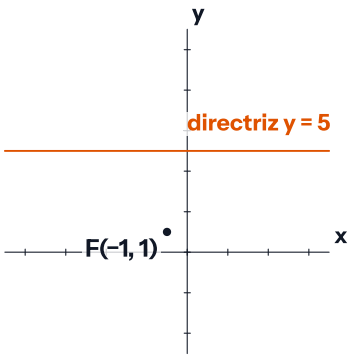


Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Una parábola tiene su foco en F(−1, 1) y su directriz es la recta y = 5. ¿Cuál es su ecuación?

A) $(x + 1)^2 = -8(y - 3)$ **B)** $(x + 1)^2 = 8(y - 3)$ **C)** $(x - 1)^2 = -8(y - 3)$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El vértice es el punto (0, 0)

1. El vértice está sobre el eje de la parábola, entre el foco y la directriz
2. Está a la misma distancia de los dos: toma el punto medio de las alturas
   $y_V = (2 + (-2)) \div 2 = 0$
3. Comprueba: está a 2 del foco y a 2 de la directriz
   $d_F = 2,\ d_D = 2$

Ojo: (0, 2) es el foco y (0, −2) es un punto de la directriz: el vértice queda entre los dos.
Truco: Vértice = punto medio entre el foco y la directriz.

2. Respuesta C · El punto (4, 2) pertenece a la parábola

1. La parábola reúne los puntos que están a igual distancia del foco y de la directriz. Prueba (2, 2)
   $d_F = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$
   $d_D = 2 - (-2) = 4$
2. Prueba (2, 3)
   $d_F = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
   $d_D = 3 - (-2) = 5$
3. Prueba (4, 2): las dos distancias coinciden
   $d_F = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$
   $d_D = 2 - (-2) = 4$

Ojo: (2, 2): midió hasta el eje x, no hasta la directriz. (2, 3): olvidó la raíz en la distancia al foco.
Truco: Compara siempre las dos distancias: al foco (con raíz) y a la directriz (en línea recta).

3. Respuesta A · P está a 6 unidades de la directriz

1. P está en la parábola: su distancia a la directriz es igual a su distancia al foco. Calcula la del foco
   $d_F = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$
2. Comprueba midiendo directo a la directriz: es vertical, así que se restan las x
   $d_D = 3 - (-3) = 6$
3. Las dos distancias son iguales, como pide la definición
   $d_D = d_F = 6$

Ojo: 3 es la x de P, no su distancia a la directriz; 9 es |6 − (−3)|, mezcla la y con la directriz.
Truco: Directriz vertical: resta las x. Directriz horizontal: resta las y.

4. Respuesta C · La ecuación es x² = 12y

1. Sea P(x, y) un punto de la parábola: su distancia al foco es igual a su distancia a la directriz
   $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = |y + 3|$
2. Elimina la raíz elevando al cuadrado ambos lados
   $x^2 + (y-3)^2 = (y+3)^2$
3. Desarrolla los binomios al cuadrado
   $x^2 + y^2 - 6y + 9$
   $= y^2 + 6y + 9$
4. Cancela y² y 9 y despeja x²
   $x^2 = 12y$

Ojo: x² = 6y usa 2p en vez de 4p; y² = 12x cambia los ejes aunque el foco está en el eje y.
Truco: Foco sobre el eje y: la ecuación es x² = (algo)·y.

5. Respuesta B · P está a 10 unidades del foco

1. Como P está en la parábola, su distancia al foco es igual a su distancia a la directriz
   $d_F = d_D$
2. La directriz es horizontal: la distancia es vertical y se restan las y
   $d_D = 9 - (-1) = 10$
3. Comprueba con la fórmula de distancia entre P y F
   $\sqrt{6^2 + (9-1)^2} = \sqrt{100} = 10$

Ojo: 9 es la altura de P, no su distancia al foco; 8 solo cuenta la distancia vertical 9 − 1.
Truco: Si el punto está en la parábola, mide a la directriz: sale sin raíces.

6. Respuesta C · y = 4 o y = −4

1. Distancia de P a la directriz: es horizontal, se restan las x
   $d_D = 1 - (-4) = 5$
2. Distancia de P al foco: fórmula de distancia
   $d_F = \sqrt{(1-4)^2 + y^2}$
   $= \sqrt{9 + y^2}$
3. Iguala las dos distancias y eleva al cuadrado
   $9 + y^2 = 25$
4. Despeja y: sale un valor positivo y otro negativo
   $y^2 = 16$
   $y = \pm 4$

Ojo: ±5 olvida el cateto horizontal 3 del foco; ±√34 suma 9 en vez de restarlo de 25.
Truco: Con raíz en una distancia, eleva al cuadrado y recuerda las dos raíces ±.

7. Respuesta A · La directriz es la recta y = 4

1. El vértice equidista del foco y de la directriz: la directriz está a 4 del vértice, p = 4
2. El foco está abajo del vértice: la directriz va arriba, en y = 4
   $y = 0 + 4 = 4$
3. Comprueba: el vértice está a 4 del foco y a 4 de la directriz
   $d_F = 4,\ d_D = 4$

Ojo: y = −4 es la altura del foco, del mismo lado; y = 8 es la distancia entre foco y directriz, no su posición.
Truco: La directriz queda del lado opuesto al foco, a la misma distancia del vértice.

8. Respuesta B · La ecuación es $(y-1)^2 = 8x$

1. Sea P(x, y): su distancia al foco y a la directriz
   $d_F = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$
   $d_D = |x+2|$
2. Iguala las distancias y eleva al cuadrado
   $(x-2)^2 + (y-1)^2$
   $= (x+2)^2$
3. Deja a un lado el término con y
   $(y-1)^2$
   $= (x+2)^2 - (x-2)^2$
4. Desarrolla: la diferencia de cuadrados es 8x
   $(y-1)^2 = 8x$

Ojo: $(y+1)^2 = 8x$ cambia el signo de la ordenada del foco; $(y-1)^2 = -8x$ pierde un signo al pasar términos.
Truco: Foco a la derecha de la directriz: la parábola se abre hacia la derecha y el coeficiente es positivo.

9. Respuesta B · La ecuación es $x^2 = 8y + 16$

1. Sea P(x, y): su distancia al foco (0, 0) y a la directriz
   $\sqrt{x^2 + y^2} = |y+4|$
2. Eleva al cuadrado ambos lados
   $x^2 + y^2 = (y+4)^2$
3. Desarrolla el binomio
   $x^2 + y^2 = y^2 + 8y + 16$
4. Cancela y^2 y despeja x^2
   $x^2 = 8y + 16$

Ojo: $x^2 = 8y$ supone el vértice en el origen, pero ahí está el foco; $x^2 = 8y - 16$ pasa mal el 16.
Truco: El foco en el origen no significa vértice en el origen: hay que deducir con la definición.

10. Respuesta A · La ecuación es $(x+1)^2 = -8(y-3)$

1. Sea P(x, y): distancia al foco y a la directriz
   $d_F = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$
   $d_D = |y-5|$
2. Iguala y eleva al cuadrado
   $(x+1)^2 + (y-1)^2$
   $= (y-5)^2$
3. Deja a un lado el término con x y desarrolla
   $(x+1)^2$
   $= (y-5)^2 - (y-1)^2$
   $= -8y + 24$
4. Factoriza -8 para ver el vértice
   $(x+1)^2 = -8(y-3)$

Ojo: Si el signo es positivo la parábola abriría hacia arriba, pero el foco está bajo la directriz; $(x-1)$ invierte la abscisa.
Truco: Foco abajo de la directriz: la parábola se abre hacia abajo y el coeficiente es negativo.