Longitud de arco

Cálculo integral.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

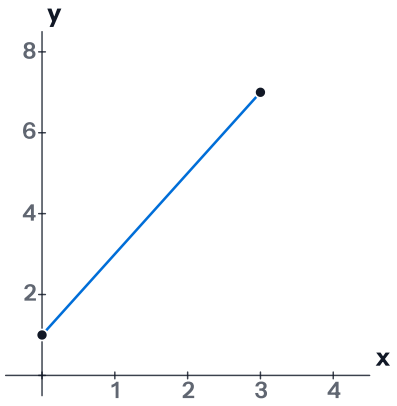
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = 3. Es una recta.

$$y = 2x + 1$$

A) $3\sqrt{3}$ **B)** $3\sqrt{5}$ **C)** $\sqrt{5}$

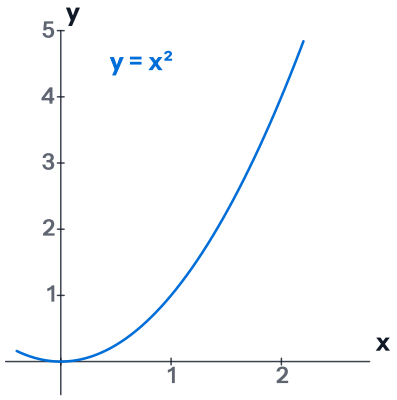


Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Se aproxima la curva $y = x^2$, de x = 0 a x = 2, con una poligonal que une (0, 0), (1, 1) y (2, 4). ¿Cuánto mide la poligonal?

A) $\sqrt{20}$ **B)** $\sqrt{2} + \sqrt{10}$ **C)** 6



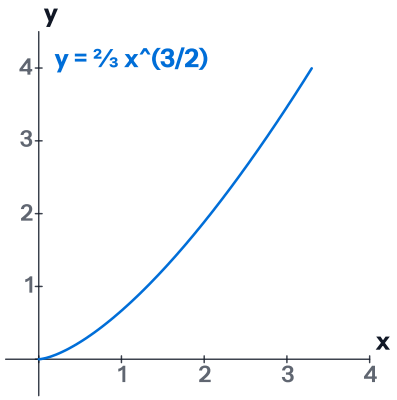
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = 3.

$$y = \frac{2}{3}x^{3/2}$$

A) 14/3 **B)** 7 **C)** 16/3

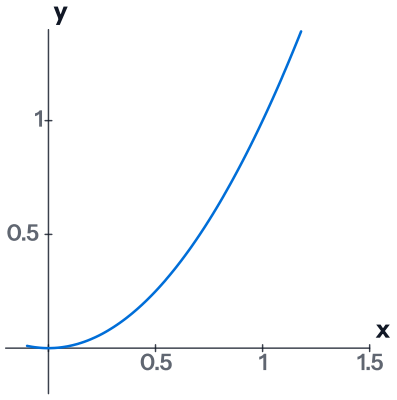


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Qué integral da la longitud de la curva y = x² entre x = 0 y x = 1?

A) $\int_0^1 \sqrt{(1 + 4x^2)}\,dx$ **B)** $\int_0^1 \sqrt{(1 + x^4)}\,dx$ **C)** $\int_0^1 \sqrt{(1 + 2x)}\,dx$



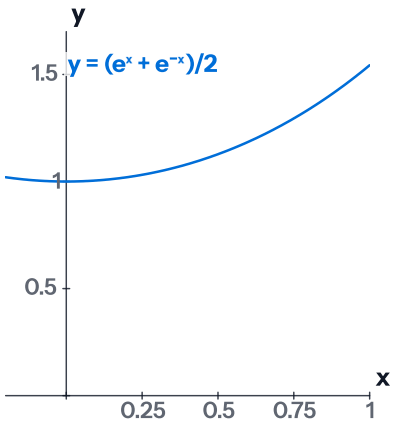
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = ln 2.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A) 1/4 **B)** 3/4 **C)** 5/4



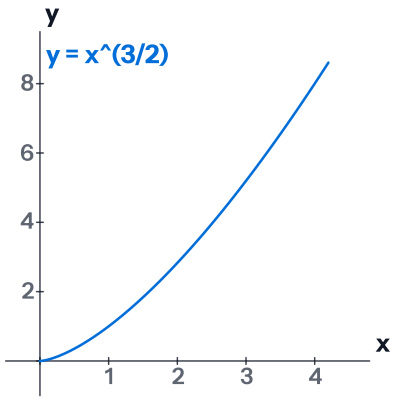
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = 4.

$$y = x^{3/2}$$

A) (2/3)(10√10 − 1) **B)** 80√10/27 **C)** (8/27)(10√10 − 1)



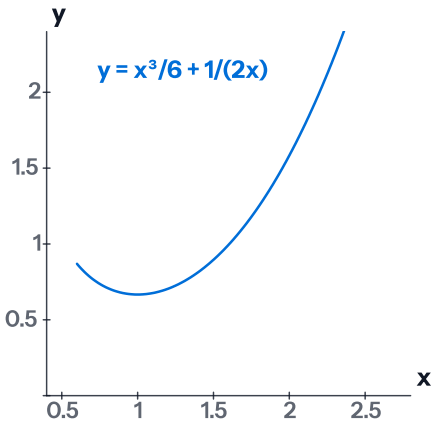
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula la longitud de la curva entre x = 1 y x = 2.

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

A) 17/12 **B)** 11/12 **C)** 13/12



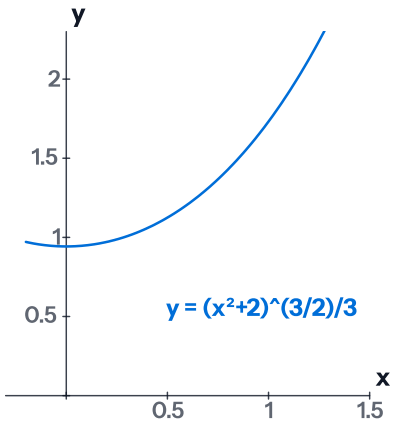
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = 1.

$$y = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$$

A) 28/15 **B)** $(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})/3$ **C)** 4/3



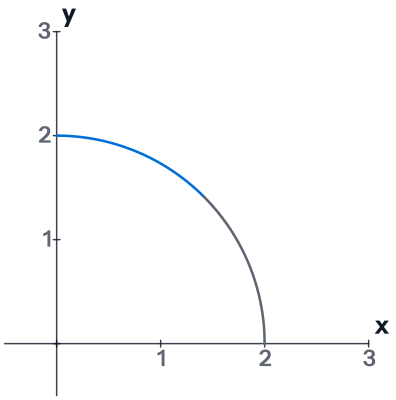
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la longitud del arco de la circunferencia entre x = 0 y x = √2.

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

A) π/2 **B)** π/4 **C)** 2√(2 − √2)



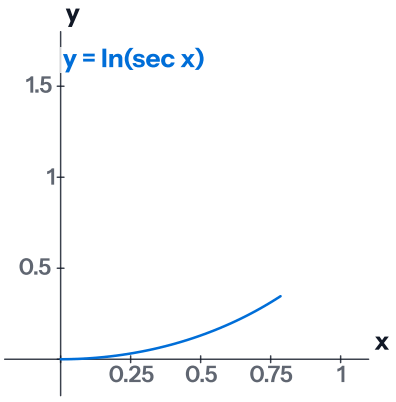
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la longitud de la curva entre x = 0 y x = π/4.

$$y = \ln(\sec x)$$

A) (1/2) ln 2 **B)** √2 − 1 **C)** ln(1 + √2)



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · La longitud es 3√5, unas 6.7 unidades

1. La pendiente es constante: f′(x) = 2
   $f'(x) = 2$
2. El integrando también es constante
   $\sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{5}$
3. Integra una constante: multiplícala por el largo del intervalo
   $L = \int_0^3 \sqrt{5}\, dx = 3\sqrt{5}$
4. Comprueba con Pitágoras: catetos 3 y 6
   $\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Ojo: 3√3 usa √(1 + 2) sin elevar f′ al cuadrado; √5 olvida multiplicar por el largo 3.
Truco: Con una recta, la fórmula de longitud de arco coincide con Pitágoras.

2. Respuesta B · Mide √2 + √10, unos 4.58

1. Marca los tres vértices de la poligonal
   $(0, 0),\ (1, 1),\ (2, 4)$
2. Primer segmento: distancia de (0, 0) a (1, 1)
   $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
3. Segundo segmento: de (1, 1) a (2, 4)
   $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
4. Suma las longitudes de los segmentos
   $\sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 4.58$

Ojo: √20 es solo la cuerda de (0, 0) a (2, 4); 6 suma catetos, 2 + 4, en vez de distancias.
Truco: La poligonal inscrita siempre es más corta que la curva; con más segmentos se acerca.

3. Respuesta A · La longitud es 14/3

1. Deriva: f′(x) = √x
   $f'(x) = x^{1/2}$
2. Eleva al cuadrado y suma 1
   $\sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} = \sqrt{1 + x}$
3. Integra: el exponente sube a 3/2 y se divide entre 3/2
   $L = \frac{2}{3}(1 + x)^{3/2}\Big|_0^3$
4. Evalúa: (1 + 3) y (1 + 0)
   $\frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3}$

Ojo: 7 olvida el factor 2/3 al integrar; 16/3 olvida restar el valor en x = 0, (2/3)·1.
Truco: Compara con una poligonal inscrita: debe dar un valor apenas menor.

4. Respuesta A · La integral de √(1 + 4x²) de 0 a 1

1. Deriva: la pendiente de la tangente es 2x
   $f'(x) = 2x$
2. Un trocito de curva mide ds = √(dx² + dy²)
   $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$
3. Sustituye f′ y eleva al cuadrado: (2x)² = 4x²
   $1 + (2x)^2 = 1 + 4x^2$
4. Suma todos los trocitos con la integral
   $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$

Ojo: √(1 + x⁴) usa f en vez de f′; √(1 + 2x) deriva bien pero olvida elevar f′ al cuadrado.
Truco: Siempre es raíz de 1 más la derivada AL CUADRADO.

5. Respuesta B · La longitud es 3/4

1. Deriva: f′(x) = (eˣ − e⁻ˣ)/2
   $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
2. Suma 1 al cuadrado: sale un cuadrado perfecto
   $1 + f'(x)^2 = f(x)^2$
3. La raíz da f(x): integra f
   $L = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$
4. Evalúa (eˣ − e⁻ˣ)/2 en ln 2 y en 0
   $\frac{2 - 1/2}{2} - 0 = \frac{3}{4}$

Ojo: 1/4 integra e⁻ˣ sin cambiar el signo; 5/4 evalúa f(ln 2) en lugar de integrar.
Truco: Cuando 1 + f′² es un cuadrado perfecto, la raíz desaparece y solo queda integrar.

6. Respuesta C · La longitud es (8/27)(10√10 − 1)

1. Deriva: f′(x) = (3/2)√x
   $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
2. Eleva al cuadrado y suma 1
   $1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{9x}{4}$
3. Sustituye u = 1 + 9x/4; du = (9/4) dx. Los límites pasan a 1 y 10
   $\frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}\, du$
   $= \frac{8}{27}u^{3/2}\Big|_1^{10}$
4. Evalúa en u = 10 y en u = 1
   $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

Ojo: (2/3)(…) olvida el factor 4/9 del cambio de variable; 80√10/27 olvida restar el valor en u = 1.
Truco: Si cambias de variable, cambia también los límites y compensa con el factor de du.

7. Respuesta A · La longitud es 17/12

1. Deriva: f′(x) = x²/2 − 1/(2x²)
$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$
2. 1 + f′² resulta un cuadrado perfecto
$$1 + f'(x)^2 = (x^2/2 + 1/(2x^2))^2$$
3. La raíz se cancela: integra x²/2 + 1/(2x²)
$$F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2x}$$
4. Evalúa F(2) − F(1)
$$\frac{13}{12} + \frac{1}{3} = \frac{17}{12}$$

Ojo: 11/12 pierde el 1 y deja (x²/2 − 1/(2x²)); 13/12 olvida restar F(1), que vale −1/3.

Truco: Si sale un cuadrado perfecto, no lo desarrolles: simplifica la raíz.

8. Respuesta C · La longitud es 4/3

1. Deriva con la regla de la cadena
$$f'(x) = x\sqrt{x^2 + 2}$$
2. Eleva al cuadrado y suma 1
$$1 + x^2(x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2$$
3. La raíz es x² + 1: integra
$$L = \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx$$
4. Evalúa en 1 y en 0
$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Ojo: 28/15 integra (x² + 1)² sin la raíz; (3√3 − 2√2)/3 olvida el 1 e integra solo f′.

Truco: Si 1 + f′² es un cuadrado perfecto, su raíz es un polinomio fácil de integrar.

9. Respuesta A · La longitud del arco es π/2

1. Deriva con la regla de la cadena
$$f'(x) = -x/\sqrt{4 - x^2}$$
2. Eleva al cuadrado y suma 1
$$1 + f'(x)^2 = \frac{4}{4 - x^2}$$
3. La raíz da 2/√(4 − x²): su integral es 2 arcsen(x/2)
$$L = 2 \arcsin \frac{x}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}$$
4. Evalúa en los dos límites
$$2 \cdot \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}$$

Ojo: π/4 olvida el 2 de 2·arcsen; 2√(2 − √2) ≈ 1.53 es la cuerda, más corta que el arco.

Truco: Compruébalo: longitud de arco = radio × ángulo = 2 × π/4.

10. Respuesta C · La longitud es ln(1 + √2), unos 0.88

1. Deriva: f′(x) = tan x
$$f'(x) = \tan x$$
2. Identidad: 1 + tan² x = sec² x
$$\sqrt{1 + \tan^2 x} = \sec x$$
3. Integra sec x: su antiderivada es ln|sec x + tan x|
$$L = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\pi/4}$$
4. Evalúa: sec(π/4) = √2 y tan(π/4) = 1
$$\ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(1)$$

Ojo: (1/2) ln 2 es cuánto sube la curva, no su longitud; √2 − 1 integra sec x tan x.

Truco: La longitud siempre es mayor que la subida vertical: aquí 0.88 contra 0.35.