Límites al infinito y asíntotas

límite cuando x tiende a más o menos infinito, asíntotas horizontales y verticales de funciones racionales.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

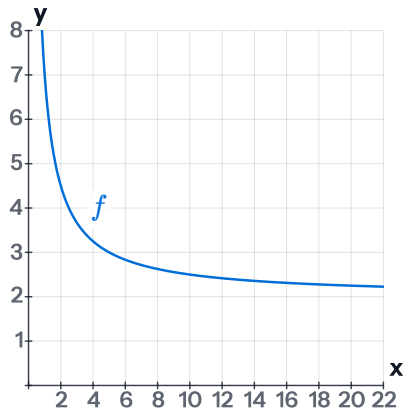
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Calcula el límite cuando x crece sin cota por la derecha (x → +∞).

$$\lim_{x \to +\infty} (2 + 5/x)$$

A) 2 **B)** 7 **C)** 0



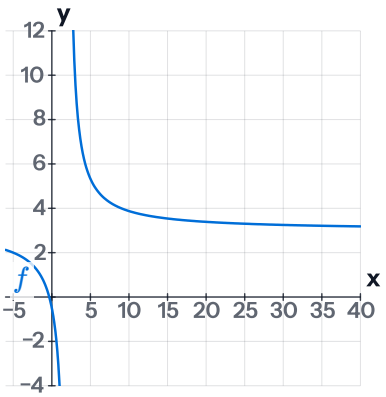
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Calcula el límite cuando x → +∞. Numerador y denominador tienen el mismo grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 1}{x - 2}$$

A) −1/2 **B)** $+\infty$ **C)** 3



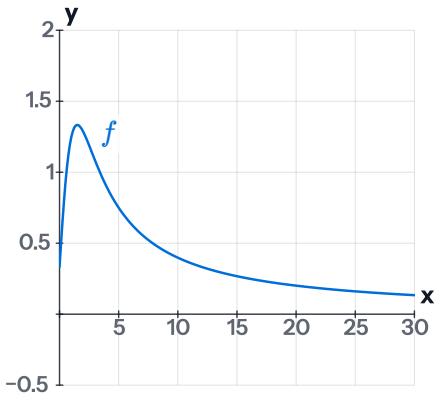
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Calcula el límite cuando x → +∞. El denominador tiene mayor grado que el numerador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x + 1}{x^2 + 3}$$

A) 4 **B)** 0 **C)** 1/3



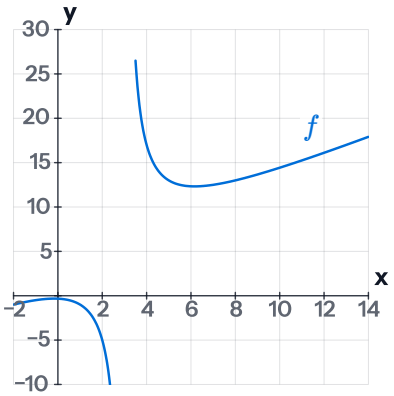
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

El límite puede ser un número, +∞ o −∞. ¿Qué pasa con f cuando x → +∞?

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

A) Se acerca a 0 **B)** Crece sin cota (+∞) **C)** Se acerca a 1



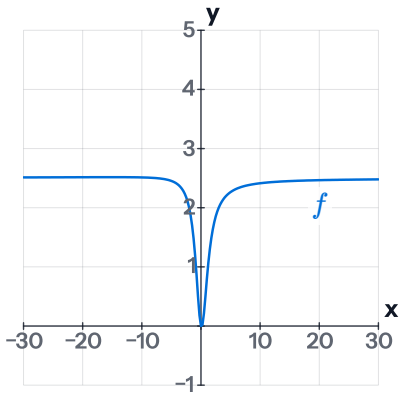
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula el límite cuando x → −∞ (x negativa y cada vez más grande en valor absoluto).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - x}{2x^2 + 3}$$

A) 5 **B)** 2/5 **C)** 5/2



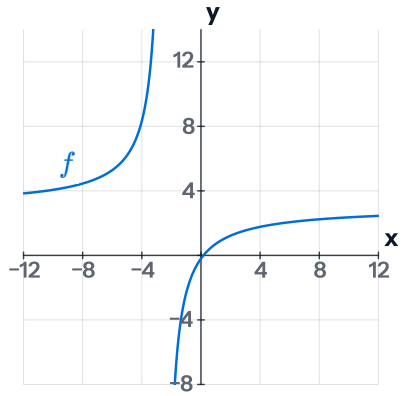
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Una asíntota horizontal y = L aparece cuando el límite de f en +∞ (o en −∞) es L. ¿Cuál es la asíntota horizontal de f?

$$f(x) = \frac{6x - 1}{2x + 5}$$

A) $y = 3$ **B)** y = −1/5 **C)** x = −5/2



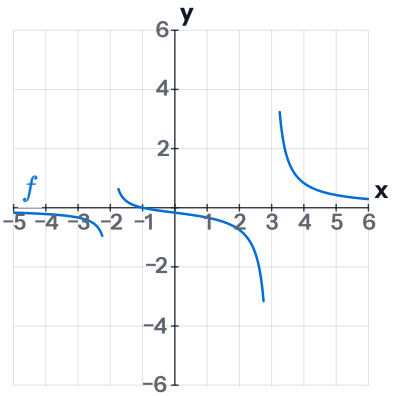
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Una asíntota vertical aparece donde el denominador vale 0 y el numerador no. ¿Cuáles son las asíntotas verticales de f?

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - x - 6}$$

A) x = −3 y x = 2 **B)** x = 3 y x = −1 **C)** x = 3 y x = −2



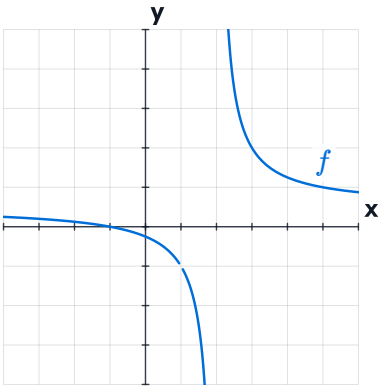
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Un factor que se cancela da un hueco, no una asíntota. ¿Cuántas asíntotas verticales tiene la gráfica de f?

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

A) Dos: x = 1 y x = 2 **B)** Una: x = 2 **C)** Ninguna



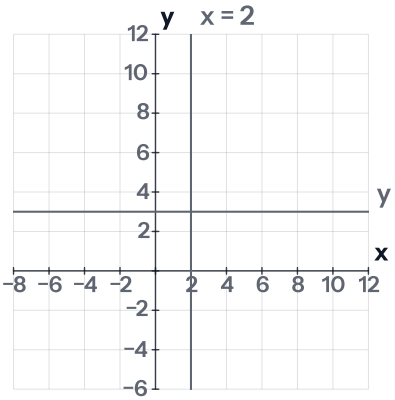
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

La gráfica de f tiene la asíntota horizontal y = 3 y la asíntota vertical x = 2. ¿Cuánto valen a y b?

$$f(x) = \frac{ax + 3}{2x - b}$$

A) a = 6 y b = 4 **B)** a = 3 y b = 4 **C)** a = 6 y b = 2



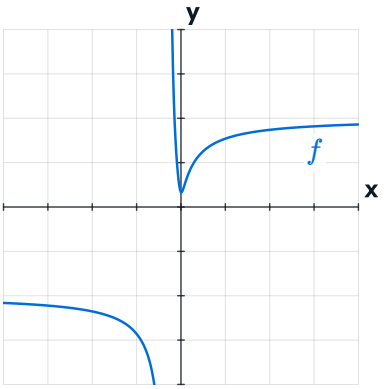
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Cuidado con el signo: la raíz cuadrada nunca es negativa, pero x sí puede serlo. ¿Cuánto vale el límite cuando x → −∞?

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 3}$$

A) -2 **B)** 2 **C)** 0



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El límite vale 2

1. Da valores grandes a x: 5/x se va haciendo pequeño
   $x = 5: \ f = 3$
   $x = 10: \ f = 2.5$
   $x = 20: \ f = 2.25$
2. Cinco entre un número enorme es casi 0
   $\frac{5}{x} \to 0$
3. Solo queda el 2
   $2 + 0 = 2$

Ojo: El 7 suma 2 + 5, como si 5/x no se achicara; el 0 supone que todo tiende a 0.
Truco: Una constante dividida entre x tiende a 0 cuando x → ±∞.

2. Respuesta C · El límite vale 3

1. Divide numerador y denominador entre x
   $\frac{3 + 1/x}{1 - 2/x}$
2. Cuando x crece, 1/x y 2/x tienden a 0
   $1/x \to 0$
   $2/x \to 0$
3. Queda el cociente de los coeficientes de x
   $\frac{3 + 0}{1 - 0} = 3$

Ojo: El −1/2 divide los términos constantes (1 entre −2); el +∞ cree que 3x + 1 crece más rápido que x − 2.
Truco: Mismo grado: el límite es el cociente de los coeficientes principales.

3. Respuesta B · El límite vale 0

1. Compara los grados: arriba 1, abajo 2
   $\text{grado arriba} = 1$
   $\text{grado abajo} = 2$
2. Divide todo entre x², la mayor potencia
   $\frac{4/x + 1/x^2}{1 + 3/x^2}$
3. Arriba tiende a 0 y abajo a 1
   $\frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$

Ojo: El 4 toma solo el coeficiente del numerador; el 1/3 divide los términos constantes (1 entre 3).
Truco: Grado del denominador mayor: el límite es 0.

4. Respuesta B · Los valores crecen sin cota: el límite es +∞

1. Compara los grados: arriba 2, abajo 1
   $\text{grado arriba} = 2$
   $\text{grado abajo} = 1$
2. Divide todo entre x
   $\frac{x + 1/x}{1 - 3/x}$
3. Arriba crece sin cota y abajo tiende a 1
   $\frac{x + 0}{1 - 0} = x \to +\infty$

Ojo: Se acerca a 0 supone que el denominador manda; se acerca a 1 compara x² con x como si fueran del mismo grado.
Truco: Grado del numerador mayor: el límite es +∞ o −∞ (no hay asíntota horizontal).

5. Respuesta C · El límite vale 5/2

1. Mismo grado: divide numerador y denominador entre x²
   $\frac{5 - 1/x}{2 + 3/x^2}$
2. Con x muy negativa, 1/x y 3/x² también tienden a 0
   $1/x \to 0$
   $3/x^2 \to 0$
3. Queda el cociente de los coeficientes de x²
   $\frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$

Ojo: El 5 toma solo el coeficiente del numerador; el 2/5 invierte el cociente de los coeficientes.
Truco: Mismo grado: coeficiente principal de arriba entre el de abajo, en +∞ y en −∞.

6. Respuesta A · La asíntota horizontal es y = 3

1. Cuando x es muy grande, el −1 y el +5 casi no cuentan
   $x \to \pm\infty: \ f \approx \frac{6x}{2x}$
2. Divide los coeficientes: ese es el límite
   $\frac{6x}{2x} = 3$
   $y = 3$
3. El denominador en 0 da la asíntota vertical, que no es la que piden
   $2x + 5 = 0$
   $x = -\frac{5}{2}$

Ojo: y = −1/5 divide los términos constantes (−1 entre 5); x = −5/2 es la asíntota vertical, no la horizontal.
Truco: Horizontal: límite en ±∞. Vertical: denominador igual a 0.

7. Respuesta C · Las asíntotas verticales son x = 3 y x = −2

1. Factoriza el denominador
   $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$
2. Iguala a 0 cada factor: son las candidatas
   $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
   $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$
3. Comprueba que el numerador no se anula ahí
   $3 + 1 = 4 \neq 0$
   $-2 + 1 = -1 \neq 0$

Ojo: x = −3 y x = 2 cambian el signo de las raíces; x = −1 es el cero del numerador, no del denominador.
Truco: Los ceros del denominador son candidatas; el numerador no debe valer 0 ahí.

8. Respuesta B · Solo hay una asíntota vertical: x = 2

1. Factoriza numerador y denominador
   $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
   $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
2. El factor x − 1 se cancela: en x = 1 hay un hueco
   $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2} \quad (x \neq 1)$
3. El factor x − 2 no se cancela: ahí hay asíntota
   $x = 2.001 : \ f = 3001$

Ojo: «Dos» iguala a 0 cada factor sin cancelar; «Ninguna» cree que, como algo se cancela, no queda asíntota.
Truco: Cancela primero: el factor que sobra en el denominador da la asíntota; el que se cancela, un hueco.

9. Respuesta A · a vale 6 y b vale 4

1. La asíntota horizontal es el cociente de los coeficientes de x
   $a/2 = 3$
   $a = 6$
2. La asíntota vertical es donde el denominador vale 0
   $2(2) - b = 0$
   $b = 4$
3. Comprueba con la función completa
   $f(x) = \dfrac{6x + 3}{2x - 4}$

Ojo: a = 3 olvida dividir entre el 2 del denominador; b = 2 toma x = b, sin dividir entre 2.
Truco: Horizontal: a / (coeficiente de x abajo). Vertical: x = b / 2.

10. Respuesta A · El límite vale −2

1. Para x grande, el +1 casi no cuenta: la raíz se parece a $\sqrt{(4x^2)}$
   $\sqrt{4x^2 + 1} \approx \sqrt{4x^2}$
2. Si x es negativa, $\sqrt{(x^2)} = |x| = -x$: la raíz da −2x
   $\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x$
   $\dfrac{-2x}{x} = -2$
3. Por la derecha sí sale +2: hay dos asíntotas horizontales
   $x \to +\infty : \ \dfrac{2x}{x} = 2$

Ojo: El 2 trata $\sqrt{(x^2)}$ como x aunque x sea negativa; el 0 supone que la raíz crece menos que el denominador.
Truco: Para x < 0, $\sqrt{(x^2)} = -x$. Revisa el signo cuando x → −∞.