La derivada: definición y notaciones

definir la derivada como límite del cociente incremental y reconocer sus notaciones.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

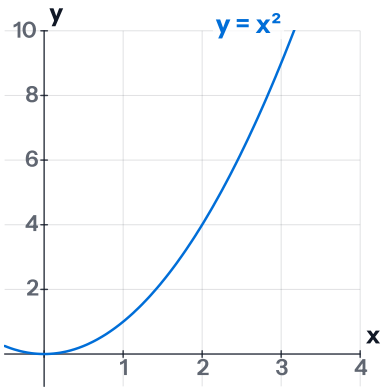
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Las secantes que unen el punto de x = 1 con el de x = 1 + h giran hacia la tangente. ¿A qué valor se acerca su pendiente cuando h tiende a 0?

$$f(x) = x^2$$

A) 4 **B)** 2 **C)** 1



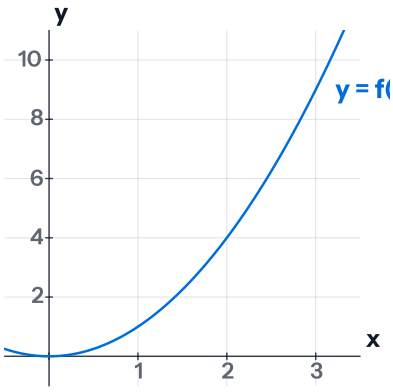
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Si y = f(x), ¿cuál de estas expresiones representa la derivada de y con respecto a x?

$$y = f(x)$$

A) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **B)** $\frac{y}{x}$ **C)** $\frac{dy}{dx}$

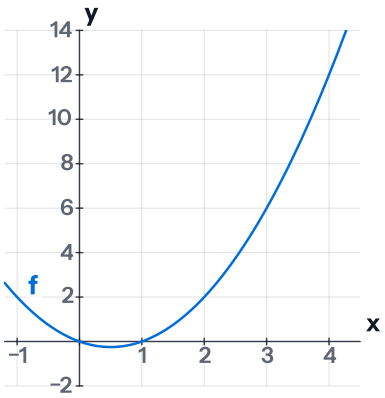


Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Para f(x) = x² − x se cumple f′(3) = 5. ¿Qué significa ese 5 en la gráfica de f?

$$f'(3) = 5$$



A) La tangente en x = 3 tiene pendiente 5

B) La gráfica pasa por el punto (3, 5)

C) La tangente en x = 5 tiene pendiente 3

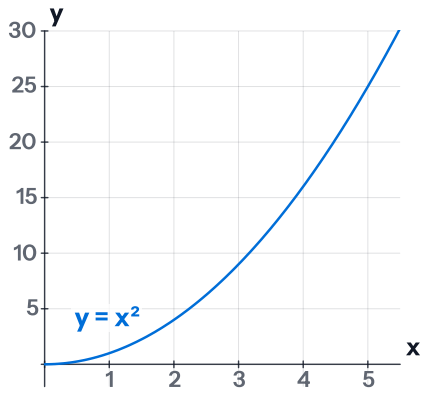
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Para f(x) = x², simplifica el cociente incremental en x = 3, con h distinto de cero.

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

A) h **B)** $6 + h$ **C)** $\frac{9}{h} + 6 + h$



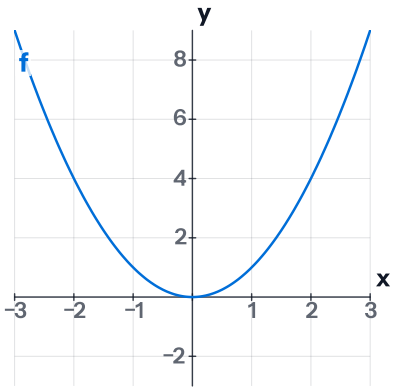
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Con la definición de derivada, ¿cuál es f′(x) si f(x) = x²?

$$f(x) = x^2$$

A) $2x + h$ **B)** 0 **C)** $2x$



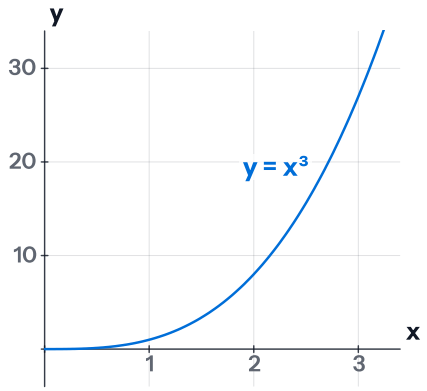
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula el límite, que es la pendiente de la tangente a f(x) = x³ en x = 2.

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$$

A) 12 **B)** 0 **C)** 8



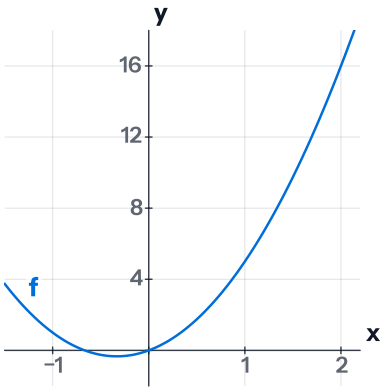
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Usa la definición para hallar la derivada de esta función.

$$f(x) = 3x^2 + 2x$$

A) $6x + 3h + 2$ **B)** $6x$ **C)** $6x + 2$



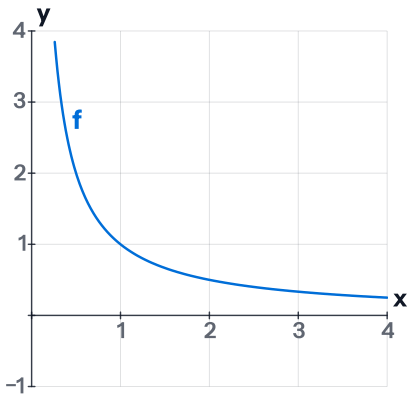
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Con la definición, ¿cuál es f′(x)? Considera x distinto de 0.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

A) $-\frac{1}{x^2}$ **B)** $\frac{1}{x^2}$ **C)** $-\frac{1}{x(x+h)}$



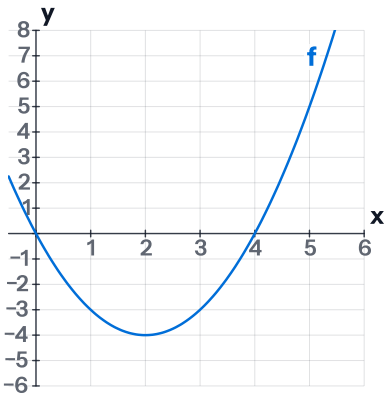
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Con la definición de derivada, halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en x = 3.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

A) $y = -3x + 6$ **B)** $y = 2x - 9$ **C)** $y = 2x - 3$



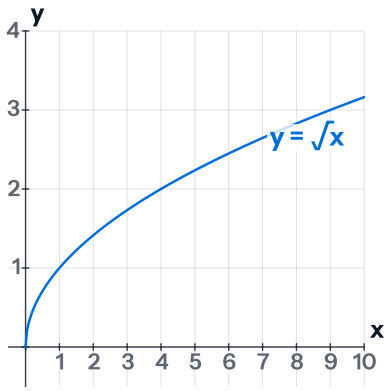
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula el límite: es la pendiente de la tangente a la raíz cuadrada en x = 4.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$$

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** 2



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · La pendiente se acerca a 2

1. Fija el punto de la parábola en x = 1
   $f(1) = 1^2 = 1$
2. Une ese punto con el de h = 2: la secante tiene pendiente 4
   $m = (9 - 1) \div 2 = 4$
3. Acerca el segundo punto: h = 1 y h = 0.5
   $m = (4 - 1) \div 1 = 3$
   $m = (2.25 - 1) \div 0.5 = 2.5$
4. Con h cerca de 0, la secante es la tangente
   $4 \to 3 \to 2.5 \to 2$

Ojo: 4 es la pendiente de la primera secante, sin acercar h a 0; 1 es la altura del punto, no la pendiente.
Truco: La derivada es el límite de las pendientes de las secantes.

2. Respuesta C · La derivada es dy/dx

1. El cociente de incrementos es la pendiente de una secante
   $\Delta x = h$
   $\Delta y = f(x + h) - f(x)$
2. Si Δx tiende a 0, la secante se vuelve tangente
   $\Delta x \to 0$
   $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}$
3. La derivada tiene varios nombres equivalentes
   $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$

Ojo: Δy/Δx es la pendiente de una secante, un promedio; y/x solo compara las coordenadas de un punto.
Truco: dy/dx es el límite de Δy/Δx cuando Δx tiende a 0.

3. Respuesta A · Es la pendiente de la tangente en x = 3

1. Ubica el punto de la gráfica en x = 3
   $f(3) = 3^2 - 3 = 6$
2. El límite del cociente incremental da la pendiente de la tangente
   $f(3 + h) - f(3) = 5h + h^2$
   $\lim_{h \to 0}(5 + h) = 5$
3. Ese 5 es la pendiente: la tangente sube 5 por cada 1 que avanza
   $f'(3) = 5$

Ojo: El 5 no es una altura: la gráfica pasa por (3, 6). El otro cambia los papeles de 3 y 5.
Truco: f′(a) es la pendiente de la tangente en x = a; f(a) es la altura.

4. Respuesta B · El cociente simplificado es 6 + h

1. Escribe el numerador con f(3 + h) y f(3)
   $(3 + h)^2 - 9$
   $= 6h + h^2$
2. Divide entre h: el factor h se cancela
   $\frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$
3. Prueba con valores de h cada vez menores
   $h = 1 : 7$
   $h = 0.5 : 6.5$
4. Cuando h tiende a 0, el cociente se acerca a 6
   $6 + h \to 6$

Ojo: h sale de expandir (3 + h)² como 9 + h²; 9/h + 6 + h olvida restar f(3) = 9.
Truco: Expande, resta f(a) y cancela h antes de tomar el límite.

5. Respuesta C · La derivada es 2x

1. Expande (x + h)² y resta x²
   $(x + h)^2 - x^2$
   $= 2xh + h^2$
2. Divide entre h
   $\frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$
3. Deja que h tienda a 0: el término h desaparece
   $f'(x) = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x$

Ojo: 2x + h olvida tomar el límite; 0 sale de expandir (x + h)² como x² + h², sin el término 2xh.
Truco: Siempre cancela h antes de hacer h → 0.

6. Respuesta A · El límite vale 12

1. Expande (2 + h)³
   $(2 + h)^3 = 8 + 12h$
   $+6h^2 + h^3$
2. Resta f(2) = 8
   $f(2 + h) - 8$
   $= 12h + 6h^2 + h^3$
3. Divide entre h
   $(12h + 6h^2 + h^3) \div h$
   $= 12 + 6h + h^2$
4. Cuando h tiende a 0, solo queda el 12
   $12 + 6h + h^2 \to 12$

Ojo: 0 sale de expandir (2 + h)³ como 8 + h³; 8 es la altura f(2), no la pendiente.
Truco: Expande completo el binomio: los términos de en medio dan la derivada.

7. Respuesta C · La derivada es 6x + 2

1. Expande f(x + h) y resta f(x)
   $f(x+h) - f(x)$
   $= 6xh + 3h^2 + 2h$
2. Divide entre h
   $(6xh + 3h^2 + 2h) \div h$
   $= 6x + 3h + 2$
3. Deja que h tienda a 0
   $f'(x) = \lim_{h\to 0}(6x + 3h + 2)$
   $= 6x + 2$

Ojo: 6x + 3h + 2 olvida tomar el límite; 6x pierde el término lineal: 2h entre h deja 2, no 0.
Truco: Cada término de f aporta su parte: 3x² da 6x y 2x da 2.

8. Respuesta A · La derivada es −1/x²

1. Resta las fracciones con denominador común
   $\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$
   $= -h \div [x(x+h)]$
2. Divide entre h: el factor h se cancela
   $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
   $= -1 \div [x(x+h)]$
3. Haz que h tienda a 0
   $x + h \to x$
   $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Ojo: 1/x² pierde el signo al restar las fracciones al revés; la tercera se queda antes de tomar el límite.
Truco: Resta con común denominador: el numerador siempre trae un h que se cancela.

9. Respuesta B · La tangente es y = 2x − 9

1. Calcula la altura del punto de tangencia
   $f(3) = 9 - 12 = -3$
2. Expande y resta f(3) para el numerador
   $f(3+h) = -3 + 2h + h^2$
   $f(3+h) + 3 = 2h + h^2$
3. Divide entre h y haz h → 0: la pendiente es 2
   $\frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \to 2$
4. Usa la forma punto-pendiente
   $y + 3 = 2(x - 3)$
   $y = 2x - 9$

Ojo: −3x + 6 usa la altura f(3) = −3 como pendiente; 2x − 3 la usa como ordenada al origen.
Truco: Para la tangente necesitas el punto f(a) y la pendiente f′(a).

10. Respuesta A · El límite vale 1/4

1. Multiplica por el conjugado del numerador
   $(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)$
   $= (4+h) - 4 = h$
2. Cancela h
   $\frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$
3. Haz h → 0
   $h \to 0 : \ \sqrt{4+h} \to 2$
   $f'(4) = \frac{1}{4}$

Ojo: 1/8 usa 1/(2x) en lugar de 1/(2√x); 2 es la altura f(4), no la pendiente.
Truco: Con raíces en el numerador, multiplica por el conjugado.