Integral definida y su notación

evaluar integrales definidas con la regla de Barrow y usar propiedades de los límites de integración.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

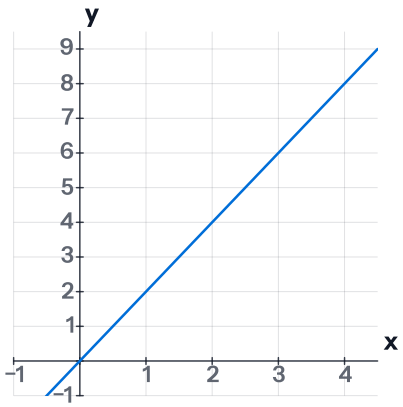
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral definida. Como 2x es positiva entre 0 y 3, también es el área bajo la recta en ese intervalo.

$$\int_0^3 2x\,dx$$

A) 6 **B)** 9 **C)** 18



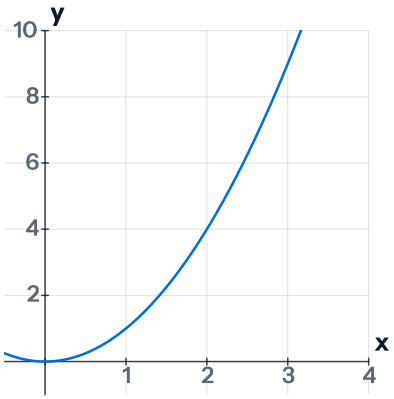
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral definida (es el área bajo la parábola entre x = 1 y x = 3).

$$\int_1^3 x^2\,dx$$

A) 26/3 **B)** 26 **C)** 28/3



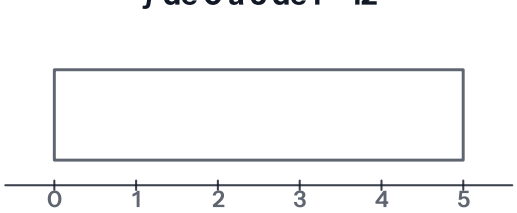
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Una función f cumple los datos siguientes. ¿Cuánto vale la integral de f entre 0 y 3?

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 12$$
$$\int_3^5 f(x)\,dx = 7$$

A) 5 **B)** 19 **C)** −5



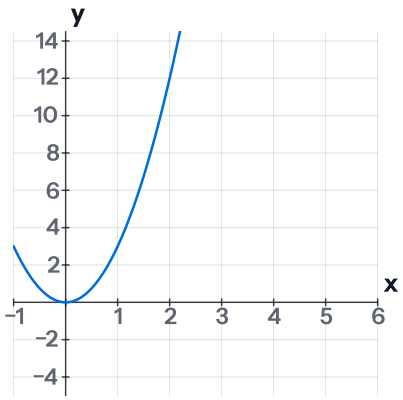
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida con signo. Fíjate en el orden de los límites: va de 2 a 0.

$$\int_2^0 3x^2\,dx$$

A) 8 **B)** −12 **C)** −8



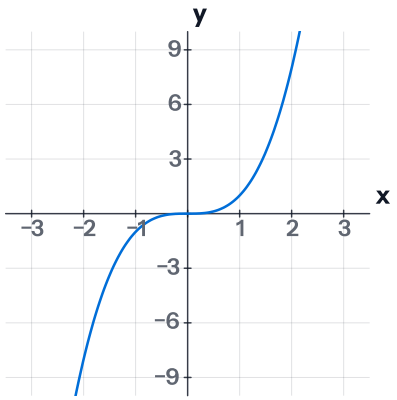
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida con signo (no el área geométrica).

$$\int_{-2}^{2} x^3 \, dx$$

A) 8 **B)** 4 **C)** 0



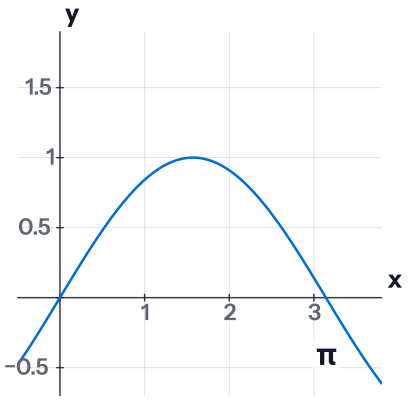
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida (es el área bajo un arco completo de la curva seno).

$$\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

A) 2 **B)** −2 **C)** 0



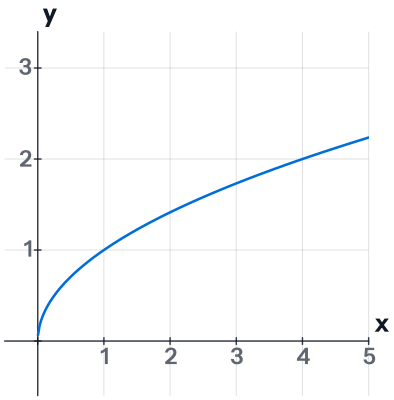
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida (es el área bajo la raíz cuadrada entre x = 0 y x = 4).

$$\int_0^4 \sqrt{x}\, dx$$

A) 8 **B)** 12 **C)** 16/3



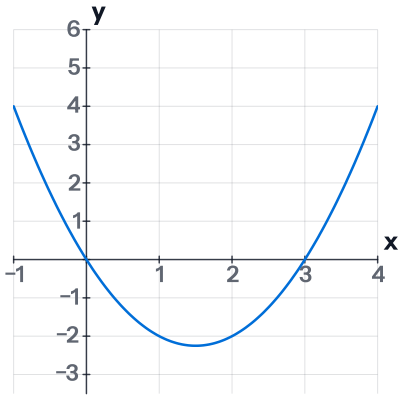
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida con signo (no el área geométrica).

$$\int_0^3 (x^2 - 3x)\, dx$$

A) 9/2 **B)** −9/2 **C)** −18



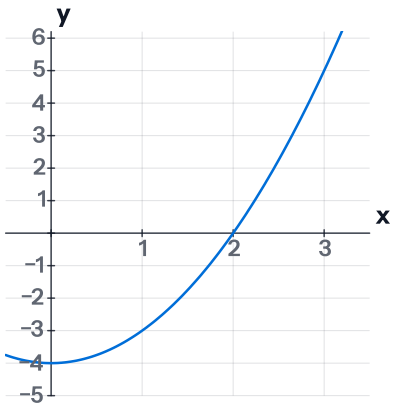
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es el área geométrica total de la región entre la curva y el eje x, desde x = 0 hasta x = 3?

$$y = x^2 - 4$$

A) -3 **B)** 23/3 **C)** 3



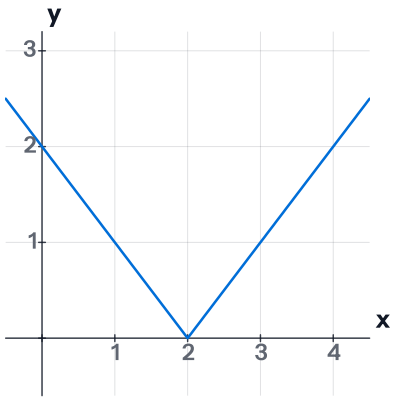
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida (es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 4).

$$\int_0^4 |x - 2|\, dx$$

A) 4 **B)** 0 **C)** 8



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · La integral vale 9

1. La integral es el área del triángulo bajo la recta, entre 0 y 3
   $\int_0^3 2x\,dx = F(3) - F(0)$
2. Busca una antiderivada de 2x
   $F(x) = x^2$
3. Evalúa en el límite superior y en el inferior
   $F(3) = 9$
   $F(0) = 0$
4. Comprueba con la geometría: base 3 y altura 6
   $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$

Ojo: 6 evalúa 2x en x = 3, no la integral; 18 es el rectángulo de 3 por 6, sin dividir entre 2.
Truco: La regla de Barrow: antiderivada en el límite superior menos antiderivada en el inferior.

2. Respuesta A · La integral vale 26/3

1. Es el área bajo la parábola entre x = 1 y x = 3
   $\int_1^3 x^2\,dx = F(3) - F(1)$
2. Antiderivada de x^2: sube el exponente y divide
   $F(x) = \frac{x^3}{3}$
3. Evalúa F en los dos límites
   $F(3) = 9$
   $F(1) = \frac{1}{3}$
4. Resta: límite superior menos límite inferior
   $9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

Ojo: 26 olvida dividir entre 3 al integrar; 28/3 suma F(1) en vez de restarlo.
Truco: Siempre es F(b) − F(a): el límite inferior se resta.

3. Respuesta A · La integral vale 5

1. Parte [0, 5] en [0, 3] y [3, 5]: las integrales se suman
   $\int_0^5 f = \int_0^3 f + \int_3^5 f$
2. Sustituye lo que se conoce
   $12 = \int_0^3 f + 7$
3. Despeja la integral desconocida
   $\int_0^3 f = 12 - 7 = 5$

Ojo: 19 suma 12 y 7 en vez de restar; −5 resta al revés, 7 − 12, y da el signo contrario.
Truco: El todo es la suma de las partes: despeja la que falta.

4. Respuesta C · La integral vale −8

1. Intercambiar los límites cambia el signo
   $\int_2^0 3x^2\,dx$
   $= -\int_0^2 3x^2\,dx$
2. Antiderivada de $3x^2$
   $F(x) = x^3$
3. Evalúa de 0 a 2 y aplica el signo
   $-(F(2) - F(0))$
   $= -(8 - 0) = -8$
4. El área mide 8, pero recorrerla al revés la vuelve negativa
   $\text{área} = 8 \Rightarrow -8$

Ojo: 8 ignora que los límites van de 2 a 0; −12 evalúa 6x, la derivada de $3x^2$, en lugar de antiderivar.
Truco: Si el límite de arriba es menor que el de abajo, la integral sale con el signo contrario.

5. Respuesta C · La integral vale 0

1. La función es impar: lo de la derecha se compensa con lo de la izquierda
   $f(-x) = -f(x)$
2. Antiderivada de x^3
   $F(x) = \frac{x^4}{4}$
3. Evalúa en los dos límites
   $F(2) = 4$
   $F(-2) = 4$
4. Resta: las dos partes se cancelan
   $4 - 4 = 0$

Ojo: 8 suma las dos áreas como si fueran positivas; 4 toma solo la mitad derecha, de 0 a 2.
Truco: En una función impar, la integral entre −a y a es 0.

6. Respuesta A · La integral vale 2

1. Es el área bajo un arco del seno, de 0 a π
   $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$
   $= F(\pi) - F(0)$
2. La antiderivada del seno es menos coseno
   $F(x) = -\cos x$
3. Evalúa en π y en 0
   $F(\pi) = -\cos\pi = 1$
   $F(0) = -\cos 0 = -1$
4. Resta: 1 menos (−1)
   $1 - (-1) = 2$

Ojo: −2 usa +cos x como antiderivada, y cos π − cos 0 da −2; 0 evalúa el seno mismo: sen π − sen 0.
Truco: Antiderivada de sen x es −cos x; de cos x es sen x.

7. Respuesta C · La integral vale 16/3

1. Escribe la raíz como potencia
   $\sqrt{x} = x^{1/2}$
2. Sube el exponente y divide entre el nuevo exponente
   $F(x) = \frac{2}{3}\, x^{3/2}$
3. Evalúa en 4
   $F(4) = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}$
4. F(0) vale 0, así que no resta nada
   $\frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

Ojo: 8 olvida el factor 2/3 de la antiderivada; 12 multiplica por 3/2 en vez de dividir entre 3/2.

Truco: Dividir entre un exponente fraccionario es multiplicar por su inverso.

8. Respuesta B · La integral vale −9/2

1. Entre 0 y 3 la curva queda debajo del eje: la integral será negativa
   $x^2 - 3x = x(x-3) < 0$
2. Integra cada término con la regla de la potencia
   $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$
3. Evalúa en los dos límites
   $F(3) = 9 - 13.5 = -4.5$
   $F(0) = 0$
4. Resta y expresa en fracción
   $-4.5 - 0 = -\frac{9}{2}$

Ojo: 9/2 es el área geométrica, sin signo; −18 integra −3x como $-3x^2$, sin dividir entre 2.

Truco: Si la curva queda bajo el eje, su integral es negativa: el área es el valor absoluto.

9. Respuesta B · El área es 23/3

1. Halla dónde la curva cruza el eje: ahí cambia el signo
   $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
2. De 0 a 2 la curva está bajo el eje: la integral sale negativa
   $F(x) = \frac{x^3}{3} - 4x$
   $F(2) - F(0) = -16/3$
3. De 2 a 3 la curva está sobre el eje: la integral sale positiva
   $F(3) - F(2) = -3 + \frac{16}{3}$
   $= \frac{7}{3}$
4. Suma los tamaños, sin signo
   $\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$

Ojo: −3 es la integral con signo, donde un tramo compensa al otro; 3 es su valor absoluto.

Truco: Para área geométrica, parte en los cruces con el eje y suma los valores absolutos.

10. Respuesta A · La integral vale 4

1. Parte en x = 2, donde cambia el valor absoluto
   $x < 2: \ |x-2| = 2 - x$
   $x \geq 2: \ |x-2| = x - 2$
2. Primer tramo, de 0 a 2
   $\int_0^2 (2-x)\, dx$
   $= 4 - 2 = 2$
3. Segundo tramo, de 2 a 4
   $\int_2^4 (x-2)\, dx$
   $= 0 - (-2) = 2$
4. Suma los dos tramos
   $2 + 2 = 4$

Ojo: 0 integra x − 2 sin el valor absoluto, y los tramos se cancelan; 8 es el rectángulo de 4 por 2.

Truco: Una integral con valor absoluto se parte en el punto donde cambia la fórmula.