Sustitución trigonométrica

sustituciones x = a sen θ, a tan θ y a sec θ para integrales con raíces, apoyadas en un triángulo rectángulo.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

A) arcsen(x/3) + C **B)** 3 arcsen(x/3) + C

C) arccos(x/3) + C

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4}$$

A) arctan(x/2) + C **B)** arctan(x/2)/4 + C

C) arctan(x/2)/2 + C

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Para eliminar la raíz de esta integral con una sustitución trigonométrica, ¿cuál sustitución conviene?

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$$

A) x = 5 sen θ **B)** x = 5 tan θ **C)** x = 5 sec θ

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida con una sustitución trigonométrica.

$$\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

A) (9/2) arcsen(x/3) + 3x√(9 − x²)/2 + C

B) (9/2) arcsen(x/3) + x√(9 − x²)/2 + C

C) (9/2) arcsen(x/3) + C

Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida para x > 3 con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

A) ln|x + √(x² − 9)| + C **B)** arcsec(x/3) + C

C) ln|x/3 + √(x² − 9)| + C

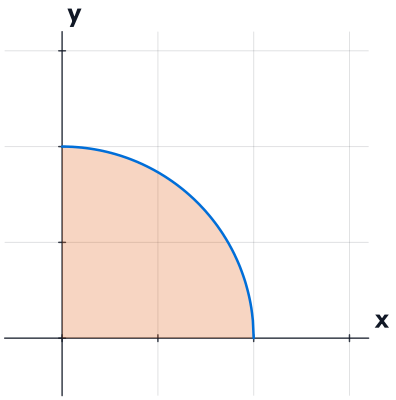
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida con una sustitución trigonométrica. Es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 2.

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

A) 2π **B)** π **C)** π/2



Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

A) $\sqrt{(x^2 + 1)}/x + C$ **B)** $1/\sqrt{(x^2 + 1)} + C$ **C)** $x/\sqrt{(x^2 + 1)} + C$

Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida para x > 0 con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$$

A) $-\sqrt{(x^2+4)}/(4x) + C$ **B)** $\sqrt{(x^2+4)}/(4x) + C$

C) $-x/(4\sqrt{(x^2+4)}) + C$

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida para −2 < x < 2 con una sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

A) $2\,\text{arcsen}(x/2) + x\sqrt{(4-x^2)}/2 + C$

B) $2\,\text{arcsen}(x/2) - x\sqrt{(4-x^2)}/2 + C$

C) $2\,\text{arcsen}(x/2) - x\sqrt{(4-x^2)} + C$

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida para x > 2 con una sustitución trigonométrica. Usa que arcsec es la función inversa de la secante.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\, dx$$

A) $\sqrt{(x^2 - 4)} - 2\,\text{arcsec}(x/2) + C$

B) $\sqrt{(x^2 - 4)} + 2\,\text{arcsec}(x/2) + C$

C) $2\sqrt{(x^2 - 4)} - 2\,\text{arcsec}(x/2) + C$

Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta **A** · La integral es arcsen(x/3) más C

1. Es $\sqrt{a^2 - x^2}$ con a = 3: usa x = 3 sen θ
   $$x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$$
   $$dx = 3\cos\theta\,d\theta$$
2. La raíz es el cateto adyacente: 3 cos θ
   $$\sqrt{9 - x^2} = 3\cos\theta$$
3. Sustituye: los 3 cos θ se cancelan
   $$\int \frac{3\cos\theta}{3\cos\theta} d\theta$$
4. Regresa a x: sen θ = x/3
   $$\mathrm{sen}\,\theta = x \div 3$$
   $$\theta = \arcsen\frac{x}{3}$$

Ojo: 3 arcsen(x/3) olvida que la raíz también trae el 3; arccos(x/3) tiene derivada con signo contrario.
Truco: Con $\sqrt{a^2 - x^2}$, x = a sen θ: la raíz se convierte en a cos θ.

2. Respuesta **C** · La integral es arctan(x/2)/2 más C

1. Es $x^2 + a^2$ con a = 2: usa x = 2 tan θ
   $$x = 2\tan\theta$$
   $$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$$
2. El denominador se vuelve 4 sec² θ
   $$x^2 + 4 = 4\sec^2\theta$$
3. Sustituye, cancela e integra
   $$\int \frac{2\sec^2\theta}{4\sec^2\theta}$$
4. Regresa a x: tan θ = x/2
   $$\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

Ojo: arctan(x/2) olvida el factor 1/a = 1/2; con 1/4 se divide entre a² en vez de entre a.
Truco: Con $x^2 + a^2$, x = a tan θ: el denominador se vuelve $a^2\sec^2\theta$.

3. Respuesta **C** · Conviene x = 5 sec θ

1. Compara con las tres formas: a² = 25
   $$a^2 = 25$$
   $$a = 5$$
2. Es $\sqrt{x^2 - a^2}$: le toca la secante
   $$x = 5\sec\theta$$
3. Comprueba: la raíz queda sin signo radical
   $$x^2 - 25 = 25(\sec^2\theta - 1)$$
   $$= 25\tan^2\theta$$

Ojo: Con sen θ queda $-25\cos^2\theta$ bajo la raíz, negativo; con tan θ queda $25\tan^2\theta - 25$, que no se simplifica.
Truco: $a^2 - x^2$ pide sen; $a^2 + x^2$ pide tan; $x^2 - a^2$ pide sec.

4. Respuesta **B** · La integral es (9/2) arcsen(x/3) + x√(9 − x²)/2 más C

1. Usa x = 3 sen θ; la raíz vale 3 cos θ
   $$x = 3\,\mathrm{sen}\,\theta$$
   $$dx = 3\cos\theta\,d\theta$$
2. Sustituye: aparece cos² θ
   $$9\int \cos^2\theta\,d\theta$$
3. Integra cos² θ con la identidad del doble ángulo
   $$\frac{9}{2}(\theta + \mathrm{sen}\theta\cos\theta)$$
4. Lee el triángulo y simplifica
   $$\frac{9}{2}\arcsen\frac{x}{3}$$
   $$+\frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + C$$

Ojo: $3x\sqrt{(9-x^2)}/2$ toma cos θ = $\sqrt{(9-x^2)}$ sin dividir entre 3; la última opción omite el término sen θ cos θ.
Truco: Al volver a x, cada razón del triángulo lleva su denominador: cos θ = $\sqrt{(9 - x^2)}/3$.

5. Respuesta **A** · La integral es ln|x + √(x² − 9)| más C

1. Es $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ con a = 3: usa x = 3 sec θ
   $$x = 3\sec\theta$$
   $$dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$
2. La raíz es el cateto opuesto: 3 tan θ
   $$\sqrt{x^2 - 9} = 3\tan\theta$$
3. Sustituye y simplifica
   $$\frac{3\sec\theta\tan\theta}{3\tan\theta}$$
4. Integra la secante
   $$\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$
5. Regresa a x con el triángulo
   $$\ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$$

Ojo: arcsec(x/3) es solo θ, como si la integral fuera ∫dθ; en el tercero la tangente no se divide entre 3.
Truco: El 3 que sale al dividir se vuelve constante: se absorbe en C.

6. Respuesta B · La integral vale π

1. Usa x = 2 sen θ

$$x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$
$$x : 0 \to 2 \Rightarrow \theta : 0 \to \pi/2$$

2. Sustituye: la raíz vale 2 cos θ

$$4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$$

3. Integra cos² θ

$$F = \frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}2\theta}{4}$$

4. Evalúa en los límites

$$4[F(\pi/2) - F(0)]$$
$$= 4(\pi \div 4) = \pi$$

Ojo: 2π olvida que ∫cos²θ vale π/4 y no π/2; π/2 pierde un factor 2 al sustituir dx.
Truco: Con límites en x, cámbialos a θ: no hace falta volver a x.

7. Respuesta C · La integral es x/√(x² + 1) más C

1. Usa x = tan θ (a = 1)

$$x = \tan\theta$$
$$dx = \sec^2\theta\,d\theta$$

2. El denominador es sec³ θ

$$x^2 + 1 = \sec^2\theta$$
$$(x^2+1)^{3/2} = \sec^3\theta$$

3. Sustituye y simplifica

$$\frac{\sec^2\theta}{\sec^3\theta}$$

4. Lee sen θ

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ojo: √(x²+1)/x invierte el cociente (hip/op); 1/√(x²+1) usa el cateto adyacente: es cos θ, no sen θ.
Truco: Para sen θ, cos θ o tan θ, lee el triángulo: cada razón es lado entre lado.

8. Respuesta A · La integral es −√(x² + 4)/(4x) más C

1. Usa x = 2 tan θ

$$dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$$

2. Sustituye y cancela

$$\frac{\sec\theta}{4\tan^2\theta}$$

3. A senos y cosenos

$$\frac{\cos\theta}{4\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

4. Integra con u = sen θ

$$-\frac{1}{4\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

5. Regresa a x

$$-\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$$

Ojo: El signo + olvida el menos de ∫u⁻²; −x/(4√(x²+4)) invierte la razón: toma sen θ como su inversa.
Truco: Si queda 1/sen θ, es hipotenusa entre opuesto: invierte la razón del triángulo.

9. Respuesta B · La integral es 2 arcsen(x/2) − x√(4 − x²)/2 más C

1. Usa x = 2 sen θ

$$x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$dx = 2\cos\theta\,d\theta$$
$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$$

2. Sustituye: el 2 cos θ se cancela

$$\int 4\,\mathrm{sen}^2\theta\,d\theta$$

3. Integra con el doble ángulo

$$= 2\theta - 2\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta$$

4. Lee el triángulo

$$2\arcsen\frac{x}{2}$$
$$-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$$

Ojo: El signo + invierte el término sen θ cos θ; −x√(4−x²) toma cos θ = √(4−x²) sin dividir entre 2.
Truco: Con sen² θ en el integrando, no olvides el signo menos del segundo término.

10. Respuesta A · La integral es √(x² − 4) − 2 arcsec(x/2) más C

1. Usa x = 2 sec θ; la raíz vale 2 tan θ
   $$x = 2\sec\theta$$
   $$dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
   $$\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$$
2. Sustituye: simplifica y queda tan² θ
   $$\int 2\tan^2\theta\, d\theta$$
3. Usa tan²θ = sec²θ − 1 e integra
   $$2\int(\sec^2\theta - 1)\, d\theta$$
   $$= 2(\tan\theta - \theta) + C$$
4. Regresa a x
   $$\sqrt{x^2-4} - 2\,\mathrm{arcsec}\frac{x}{2} + C$$

Ojo: El signo + usa tan² θ = sec² θ + 1; 2√(x²−4) toma tan θ = √(x²−4), sin dividir entre 2.
Truco: Si queda tan² θ, cámbiala por sec² θ − 1 antes de integrar.