# Integración por partes

elegir u y dv con LIATE, aplicar la fórmula uv − ∫v du, repetirla y evaluar integrales definidas.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

## EJERCICIOS

**1** NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida con integración por partes.

$$\int x\, e^{x}\, dx$$

**A)** (x − 1)e^x + C **B)** (x + 1)e^x + C **C)** x e^x + C

Tu procedimiento

**2** NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida con integración por partes.

$$\int x \cos x\, dx$$

**A)** x sen x − cos x + C **B)** x sen x + cos x + C

**C)** (x²/2) sen x + C

Tu procedimiento

**3** NIVEL FÁCIL

Para integrar por partes, ¿cuál es la mejor elección de u y dv? Usa la regla LIATE: logaritmo, inversa trigonométrica, algebraica, trigonométrica y exponencial.

$$\int x \ln x \, dx$$

**A)** u = x, dv = ln x dx **B)** u = x ln x, dv = dx

**C)** u = ln x, dv = x dx

| | |
|---|---|
| L | logaritmo |
| I | inversa trig. |
| A | algebraica |
| T | trigonométrica |
| E | exponencial |

Tu procedimiento

**4** NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida con integración por partes.

$$\int x \, e^{2x} \, dx$$

**A)** x e^(2x)/2 − e^(2x)/2 + C **B)** x e^(2x) − e^(2x)/2 + C

**C)** x e^(2x)/2 − e^(2x)/4 + C

Tu procedimiento

**5** NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida para x > 0. No parece un producto, pero se resuelve por partes: piensa en ln x · 1.

$$\int \ln x \, dx$$

**A)** 1/x + C **B)** x ln x − x + C **C)** x ln x − 1 + C

Tu procedimiento

**6** NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida para x > 0 con integración por partes.

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

**A)** $x^3 \ln x/3 - x^3/9 + C$ **B)** $x^3 \ln x/3 - x^3/3 + C$

**C)** $x^3 \ln x/3 + x^3/9 + C$

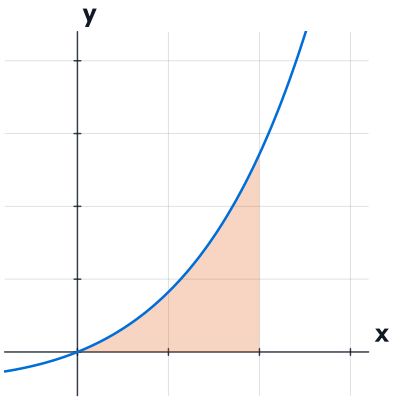
Tu procedimiento

**7** NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida. Es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 1.

$$\int_0^1 x \, e^x \, dx$$

**A)** 1 **B)** 0 **C)** 2e − 1




Tu procedimiento

**8** NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida. Tendrás que integrar por partes dos veces.

$$\int x^2 e^x \, dx$$

**A)** (x² − 2x)e^x + C **B)** (x² + 2x + 2)e^x + C

**C)** (x² − 2x + 2)e^x + C

Tu procedimiento

**9** NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida. Al integrar por partes dos veces, la integral original reaparece: trátala como una incógnita.

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

**I = ∫ $e^x$ sen x dx**

**A)** e^x (sen x − cos x) + C **B)** e^x (sen x − cos x)/2 + C

**C)** e^x (sen x + cos x)/2 + C

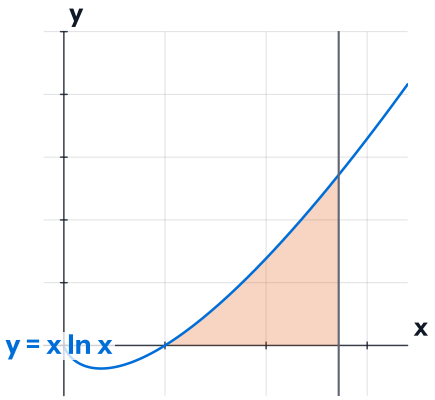
Tu procedimiento

**10** NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida. Es el área bajo la curva entre x = 1 y x = e.

$$\int_1^e x \ln x \, dx$$

**A)** $(e^2 + 1)/4$ **B)** $(e^2 - 1)/4$ **C)** $e^2/4$




Tu procedimiento

# Claves y paso a paso

### 1. Respuesta A · La integral es (x − 1)e^x más C

1. Elige u y dv: la x se simplifica al derivarla
   $u = x$
   $dv = e^x\,dx$
2. Calcula du y v
   $du = dx$
   $v = e^x$
3. Aplica ∫u dv = uv − ∫v du
   $xe^x - \int e^x\,dx$
4. Integra y factoriza
   $xe^x - e^x + C$
   $= (x-1)e^x + C$

**Ojo:** (x + 1)eˣ pierde el signo menos delante de ∫v du; x eˣ + C olvida por completo la integral que resta.
**Truco:** Después de integrar por partes, deriva el resultado: debe volver a x eˣ.

### 2. Respuesta B · La integral es x sen x + cos x más C

1. Elige u = x y dv = cos x dx
   $u = x$
   $dv = \cos x\,dx$
2. Calcula du y v
   $du = dx$
   $v = \operatorname{sen} x$
3. Aplica la fórmula
   $x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx$
4. Integra: ∫ sen x dx = −cos x
   $x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C$
   $= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$

**Ojo:** x sen x − cos x olvida que ∫sen x dx = −cos x; (x²/2) sen x integra cada factor por separado.
**Truco:** Un menos delante de ∫v du cambia el signo de lo que integres: cuida los signos.

### 3. Respuesta C · Conviene u = ln x y dv = x dx

1. Clasifica cada factor con LIATE
   $\ln x \to \mathrm{L}, \quad x \to \mathrm{A}$
2. u es el que aparece primero en LIATE
   $u = \ln x$
3. dv es lo que sobra y debe integrarse fácil
   $dv = x\,dx$

**Ojo:** u = x obliga a integrar ln x, que no es inmediata; u = x ln x deja un du más complicado.
**Truco:** Si una función no sabes integrarla (como ln x), ponla como u: sí sabes derivarla.

### 4. Respuesta C · La integral es x e^(2x)/2 − e^(2x)/4 más C

1. Elige u = x y dv = e^{2x} dx
   $u = x$
   $dv = e^{2x}\,dx$
2. Calcula du y v: v lleva un factor 1/2
   $du = dx$
   $v = \dfrac{e^{2x}}{2}$
3. Aplica la fórmula
   $\dfrac{xe^{2x}}{2} - \int \dfrac{e^{2x}}{2}dx$
4. Integra e^{2x}: sale otro 1/2
   $\dfrac{e^{2x}}{2} \div 2 = \dfrac{e^{2x}}{4}$

**Ojo:** El primero deja e^(2x)/2 sin dividir entre 2 la segunda vez; el segundo toma v = e^(2x) sin dividir.
**Truco:** Cada vez que integras e^(ax), aparece un factor 1/a: dos integrales, dos factores.

### 5. Respuesta B · La integral es x ln x − x más C

1. Escribe el 1 oculto: u = ln x, dv = dx
   $u = \ln x$
   $dv = dx$
2. Calcula du y v
   $du = \dfrac{dx}{x}$
   $v = x$
3. Aplica la fórmula y simplifica
   $x \ln x - \int x \cdot \dfrac{1}{x}\,dx$
4. Integra lo que quedó
   $x \ln x - x + C$

**Ojo:** 1/x es la derivada de ln x; x ln x − 1 integra ∫1 dx como 1 en lugar de x.
**Truco:** Una integral que no parece un producto puede resolverse por partes con dv = dx.

### 6. Respuesta A · La integral es $x^3 \ln x/3 - x^3/9$ más C

1. Por LIATE, u = ln x y dv = $x^2$ dx
   $u = \ln x$
   $dv = x^2\,dx$
2. Calcula du y v
   $du = dx \div x$
   $v = \dfrac{x^3}{3}$
3. Aplica la fórmula y simplifica
   $\dfrac{x^3}{3}\ln x - \int \dfrac{x^2}{3}dx$
4. Integra $x^2/3$: potencia
   $\int \dfrac{x^2}{3}\,dx = \dfrac{x^3}{9}$

**Ojo:** $-x^3/3$ integra $x^2/3$ sin dividir otra vez entre 3; $+x^3/9$ olvida el signo menos de la fórmula.
**Truco:** Al restar $\int v\,du$, no olvides que v ya trae un divisor; la nueva integral trae otro.

### 7. Respuesta A · La integral vale 1

1. Encuentra una antiderivada por partes
   $u = x,\ \ dv = e^x\,dx$
   $F(x) = (x-1)e^x$
2. Evalúa F en los límites
   $F(1) = 0 \cdot e = 0$
   $F(0) = (-1)\cdot 1 = -1$
3. Resta: límite superior menos inferior
   $F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1$

**Ojo:** 0 evalúa solo el límite superior; 2e − 1 usa $(x+1)e^x$, con el signo equivocado en la antiderivada.
**Truco:** En una integral definida resta siempre: F(superior) − F(inferior), cuidando los signos.

### 8. Respuesta C · La integral es $(x^2 - 2x + 2)e^x$ más C

1. Primera vez: u = $x^2$, dv = e^x dx
   $x^2e^x - \int 2x\,e^x\,dx$
2. Segunda vez, con u = 2x
   $\int 2x\,e^x\,dx = 2x\,e^x - \int 2e^x\,dx$
3. Junta todo, cuidando el menos de afuera
   $x^2e^x - (2x\,e^x - 2e^x)$
   $= x^2e^x - 2x\,e^x + 2e^x$
4. Factoriza e^x
   $= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$

**Ojo:** $(x^2 - 2x)e^x$ deja sin resolver la segunda integral; con +2x el menos de afuera no se aplica al paréntesis.
**Truco:** Si u es $x^2$, habrá que repetir: los signos de la tabla alternan +, −, +.

### 9. Respuesta B · La integral es $e^x(\text{sen } x - \cos x)/2$ más C

1. Primera vez: u = sen x, dv = e^x dx
   $I = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx$
2. Segunda vez: u = cos x. Aparece I
   $\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + I$
   $I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$
3. Despeja I: pasa −I al otro lado
   $2I = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$
4. Divide entre 2 y agrega C
   $I = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2} + C$

**Ojo:** Sin dividir entre 2 se queda en 2I; con sen x + cos x se obtiene la integral de $e^x$ cos x.
**Truco:** Si tras dos veces vuelve la integral original, trátala como incógnita y despeja.

### 10. Respuesta A · La integral vale $(e^2 + 1)/4$

1. Integra por partes con u = ln x, dv = x dx
   $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4}$
2. Evalúa en el límite superior x = e
   $F(e) = e^2 \div 2 - e^2 \div 4$
   $F(e) = \dfrac{e^2}{4}$
3. Evalúa en x = 1 y resta
   $F(1) = 0 - 1 \div 4$
   $F(e) - F(1) = \dfrac{e^2 + 1}{4}$

**Ojo:** $(e^2 - 1)/4$ toma F(1) = +1/4; $e^2/4$ evalúa solo el límite superior y olvida restar F(1).
**Truco:** Al restar F(inferior), si es negativo, el signo menos se vuelve más.