Integración por fracciones parciales

Cálculo integral.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

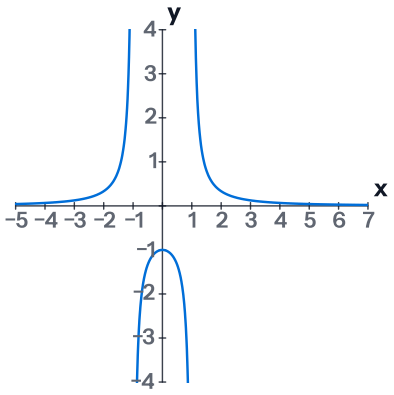
1 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida.

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$$

A) (1/2) ln|x − 1| − (1/2) ln|x + 1| + C **B)** (1/2) ln|x − 1| + (1/2) ln|x + 1| + C

C) (1/2) ln|x + 1| − (1/2) ln|x − 1| + C



Tu procedimiento

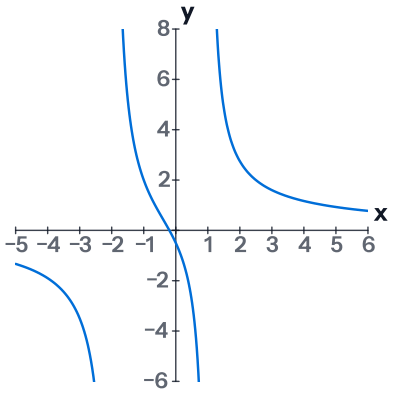
2 NIVEL FÁCIL

Calcula la integral indefinida. Usa el método de tapar un factor y sustituir su raíz.

$$\int \frac{5x + 1}{(x - 1)(x + 2)}\, dx$$

A) 3 ln|x − 1| + 2 ln|x + 2| + C **B)** 2 ln|x − 1| − 3 ln|x + 2| + C

C) 2 ln|x − 1| + 3 ln|x + 2| + C



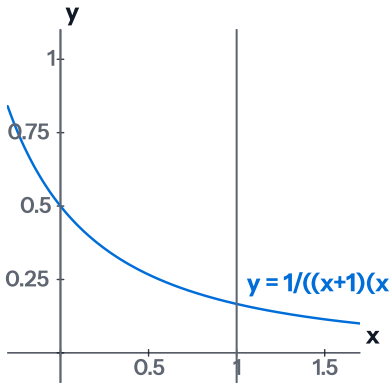
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Calcula el valor de la integral definida. Es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

A) ln(3/4) **B)** ln(2/3) **C)** ln(4/3)



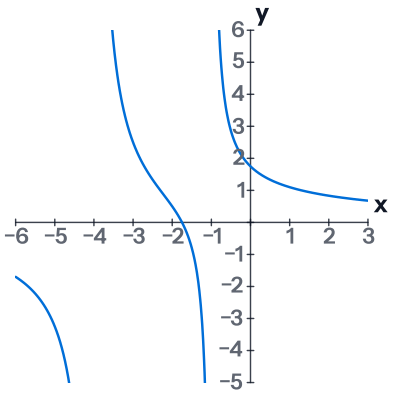
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la descomposición en fracciones parciales de la expresión?

$$\frac{4x+7}{x^2+5x+4}$$

A) 3/(x + 1) + 1/(x + 4) **B)** 1/(x + 1) + 3/(x + 4) **C)** 1/(x + 1) − 3/(x + 4)



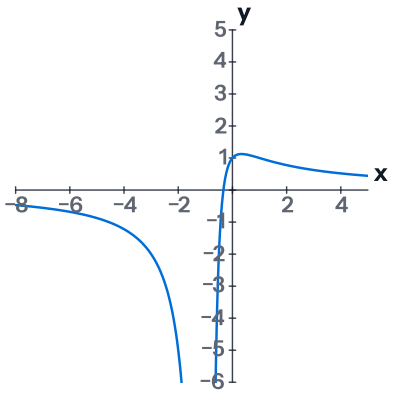
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida. El denominador tiene un factor repetido.

$$\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$$

A) 3 ln|x + 1| − 2/(x + 1) + C **B)** 3 ln|x + 1| + 2/(x + 1) + C **C)** ln|x + 1| + C



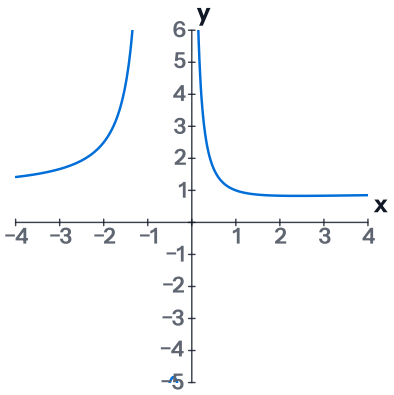
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la integral indefinida. Fíjate en el grado del numerador y del denominador.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2+x}\,dx$$

A) x + ln|x| − 2 ln|x + 1| + C **B)** ln|x| − 2 ln|x + 1| + C **C)** x + ln|x| + 2 ln|x + 1| + C



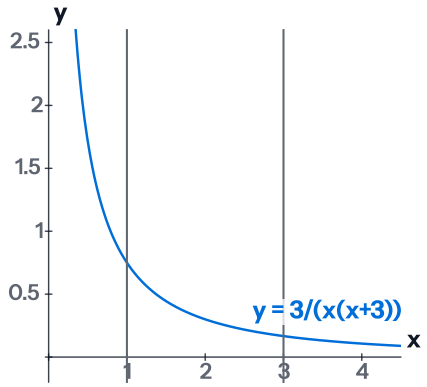
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula el valor de la integral definida. Es el área bajo la curva entre x = 1 y x = 3.

$$\int_1^3 \frac{3}{x(x+3)}\,dx$$

A) ln(9/2) **B)** ln(1/2) **C)** ln 2



Tu procedimiento

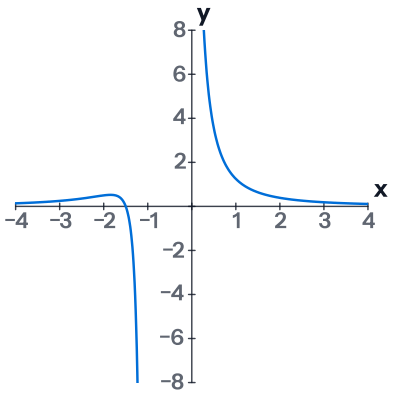
8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral indefinida. Hay un factor lineal y un factor repetido.

$$\int \frac{2x+3}{x(x+1)^2}\,dx$$

A) 3 ln|x| − 3 ln|x + 1| − 1/(x + 1) + C **B)** 3 ln|x| − 3 ln|x + 1| + 1/(x + 1) + C

C) 3 ln|x| + 3 ln|x + 1| + 1/(x + 1) + C



Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

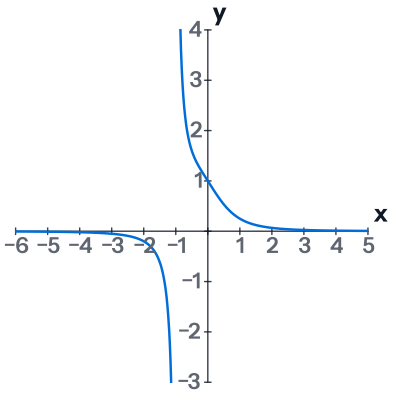
Calcula la integral indefinida. Un factor es cuadrático.

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$$

A) (1/2) ln|x + 1| − (1/4) ln(x² + 1) + (1/2) arctan x + C

B) (1/2) ln|x + 1| − (1/2) ln(x² + 1) + (1/2) arctan x + C

C) (1/2) ln|x + 1| − (1/4) ln(x² + 1) − (1/2) arctan x + C



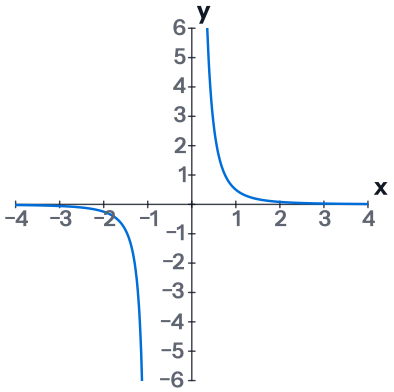
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

La fracción se descompone en A/x + B/x² + C/(x + 1). ¿Cuánto valen A, B y C?

$$\frac{1}{x^2(x+1)}$$

A) A = −1, B = 1, C = 1 **B)** A = 1, B = 1, C = 1 **C)** A = 1, B = 1, C = −1



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · (1/2) ln|x − 1| − (1/2) ln|x + 1| + C

1. Factoriza el denominador: es una diferencia de cuadrados
   $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
2. Una constante sobre cada factor; multiplica para quitar denominadores
   $1 = A(x+1) + B(x-1)$
3. Sustituye las raíces de los factores para hallar A y B
   $x = 1:\ 1 = 2A$
   $x = -1:\ 1 = -2B$
   $A = 1/2,\ B = -1/2$
4. Integra cada fracción: cada una da un logaritmo
   $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$

Ojo: Si B sale positivo se suman los logaritmos; si se intercambian A y B, los logaritmos quedan al revés.
Truco: Cada factor lineal distinto aporta una constante sobre él y un logaritmo.

2. Respuesta C · 2 ln|x − 1| + 3 ln|x + 2| + C

1. Pon A sobre x − 1 y B sobre x + 2, y quita denominadores
   $5x + 1 = A(x+2)$
   $+B(x-1)$
2. Con x = 1 se anula el término de B
   $x = 1:\ 6 = 3A$
   $A = 2$
3. Con x = −2 se anula el de A; cuida el signo
   $x = -2:\ -9 = -3B$
   $B = 3$
4. Integra: cada fracción da un logaritmo
   $2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + C$

Ojo: Intercambiar A y B da 3 y 2; olvidar que −9 entre −3 es positivo da B = −3 y un signo menos.
Truco: Al tapar un factor, sustituye su raíz en el resto de la fracción.

3. Respuesta C · El área es ln(4/3), unos 0.29

1. Descompón: una constante sobre cada factor
   $1 = A(x+2) + B(x+1)$
2. Las raíces dan A y B; la integral es una resta de áreas
   $x = -1:\ A = 1$
   $x = -2:\ B = -1$
3. Antiderivada: ln|x+1| − ln|x+2|. Evalúa en los límites 1 y 0
   $F(1) = \ln 2 - \ln 3$
   $F(0) = -\ln 2$
4. Resta F(1) − F(0) y junta los logaritmos
   $2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$

Ojo: Olvidar F(0) deja ln(2/3); invertir el cociente da ln(3/4), negativo, imposible para una función positiva.
Truco: Una función positiva da integral definida positiva: úsalo para revisar el signo.

4. Respuesta B · Uno sobre (x + 1) más tres sobre (x + 4)

1. Factoriza el denominador
   $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$
2. Tapa x + 1 y sustituye x = −1 para hallar A
   $A = \frac{4(-1)+7}{(-1)+4} = 1$
3. Tapa x + 4 y sustituye x = −4 para hallar B
   $B = \frac{4(-4)+7}{(-4)+1} = 3$
4. Comprueba con x = 0: la suma debe dar lo mismo que la fracción
   $f(0) = 7/4$
   $1/1 + 3/4 = 7/4$

Ojo: Intercambiar A y B da 3/(x + 1) + 1/(x + 4); sustituir −4 sin cuidar el signo da B negativo.
Truco: Comprueba una descomposición sustituyendo un valor fácil, como x = 0.

5. Respuesta B · 3 ln|x + 1| + 2/(x + 1) + C

1. Un factor repetido lleva una fracción por cada potencia
   $3x + 1 = A(x+1) + B$
2. Compara los coeficientes de x y los términos constantes
   $A = 3$
   $3 + B = 1$
   $B = -2$
3. La fracción queda como 3/(x+1) menos 2/(x+1)²; intégralas distinto
   $\int \frac{-2}{(x+1)^2}dx = \frac{2}{x+1}$
4. Suma los dos resultados
   $3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$

Ojo: Si integras −2/(x + 1)² como si diera un logaritmo, 3 ln − 2 ln se reduce a ln|x + 1|.
Truco: La potencia 1/(x + a)² se integra con la regla de potencias, no con logaritmo.

6. Respuesta A · x + ln|x| − 2 ln|x + 1| + C

1. Numerador y denominador tienen el mismo grado: divide primero
   $$x^2+1=(x^2+x)+(1-x)$$
   $$\frac{x^2+1}{x^2+x}=1+\frac{1-x}{x^2+x}$$
2. Descompón el resto: A sobre x y B sobre x + 1
   $$1-x=A(x+1)+Bx$$
3. Con x = 0 sale A; con x = −1 sale B
   $$x=0:\ 1=A$$
   $$x=-1:\ 2=-B$$
   $$B=-2$$
4. Integra el 1 y las dos fracciones
   $$x+\ln|x|-2\ln|x+1|+C$$

Ojo: Sin dividir primero se pierde el término x; con B = +2 los logaritmos de x + 1 llevan signo contrario.
Truco: Si el grado del numerador no es menor, divide antes de descomponer.

7. Respuesta C · El área es ln 2, unos 0.69

1. Descompón: una constante sobre cada factor
   $$3=A(x+3)+Bx$$
2. Las raíces dan A y B
   $$x=0:\ 3=3A$$
   $$x=-3:\ 3=-3B$$
   $$A=1,\ B=-1$$
3. Antiderivada y valores en 3 y en 1 (x es positiva)
   $$F(x)=\ln x-\ln(x+3)$$
   $$F(3)=\ln 3-\ln 6$$
   $$F(1)=-\ln 4$$
4. Resta y junta los logaritmos
   $$\ln 3-\ln 6+\ln 4=\ln 2$$

Ojo: ln(1/2) es F(3) solo, sin restar F(1); ln(9/2) sale de sumar las fracciones: ln[x(x + 3)] entre 1 y 3.
Truco: Después de integrar, evalúa en los dos límites: F(b) − F(a).

8. Respuesta B · 3 ln|x| − 3 ln|x + 1| + 1/(x + 1) + C

1. Una fracción para x y una por cada potencia de x + 1
   $$2x+3=A(x+1)^2$$
   $$+Bx(x+1)+Cx$$
2. x = 0 da A y x = −1 da C
   $$x=0:\ A=3$$
   $$x=-1:\ C=-1$$
3. Los términos en x² deben sumar cero: A + B = 0
   $$x^2:\ 0=A+B$$
   $$B=-3$$
4. Integra; −1/(x + 1)² da +1/(x + 1)
   $$3\ln|x|-3\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}$$

Ojo: Con C = +1 la potencia da −1/(x + 1); si tomas B = A en vez de B = −A, B sale +3.
Truco: Con raíces distintas y repetidas, usa sustituciones y luego el coeficiente de x².

9. Respuesta A · ln|x+1|/2 − ln(x²+1)/4 + arctan(x)/2 + C

1. Sobre x² + 1 va Bx + C
   $$1=A(x^2+1)$$
   $$+(Bx+C)(x+1)$$
2. Halla A, B y C
   $$A=\tfrac{1}{2},\ B=-\tfrac{1}{2},\ C=\tfrac{1}{2}$$
3. A da un logaritmo
   $$\frac{1}{2}\ln|x+1|$$
4. Con u = x² + 1 sale el segundo
   $$-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$
5. C da un arco tangente
   $$\frac{1}{2}\arctan x$$

Ojo: Olvidar el 1/2 de du = 2x deja −(1/2) ln(x² + 1); tomar C = −1/2 invierte el signo del arco tangente.
Truco: Sobre un factor cuadrático va Bx + C: da un logaritmo y un arco tangente.

10. Respuesta A · A es −1, B es 1 y C es 1

1. Una fracción por cada potencia de x y una para x + 1
   $$1=Ax(x+1)$$
   $$+B(x+1)+Cx^2$$
2. x = 0 anula dos términos y deja B
   $$x=0:\ 1=B$$
3. x = −1 anula dos términos y deja C
   $$x=-1:\ 1=C$$
4. El coeficiente de x² es cero: A + C = 0
   $$x^2:\ 0=A+C$$
   $$A=-1$$

Ojo: A = C = 1 olvida A + C = 0; C = −1 sale de usar x en vez de x² al sustituir.
Truco: Con raíces como x = 0 y x = −1 sale B y C; A sale del coeficiente de x².