Integración por cambio de variable

resolver integrales indefinidas y definidas por sustitución, eligiendo u y du.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Resuelve la integral indefinida con un cambio de variable.

$$\int 2x\,(x^2+1)^3\,dx$$

A) $(x^2+1)^4 + C$ **B)** $(x^2+1)^4/4 + C$ **C)** $(x^2+1)^4/8 + C$

$\int 2x(x^2+1)^3\,dx$

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Resuelve la integral indefinida con un cambio de variable.

$$\int \cos(3x)\,dx$$

A) sen(3x)/3 + C **B)** 3 sen(3x) + C **C)** sen(3x) + C

$\int \cos(3x)\,dx$

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Resuelve la integral indefinida con un cambio de variable.

$$\int x \, \exp(x^2) \, dx$$

A) e^(x²)/2 + C **B)** 2e^(x²) + C **C)** e^(x²) + C

∫ x e^(x²) dx

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Haces u = x² + 1. ¿Cuál integral se convierte exactamente en un múltiplo de ∫ u⁵ du, sin que quede ninguna x?

A) ∫ (x²+1)⁵ dx **B)** ∫ x(x²+1)⁵ dx **C)** ∫ x²(x²+1)⁵ dx

Integral
∫ (x²+1)⁵ dx
∫ x(x²+1)⁵ dx
∫ x²(x²+1)⁵ dx

Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Resuelve la integral indefinida con un cambio de variable.

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$$

A) ln(x²+1) + C **B)** ln(x²+1)/(2x) + C **C)** ln(x²+1)/2 + C

∫ x/(x²+1) dx

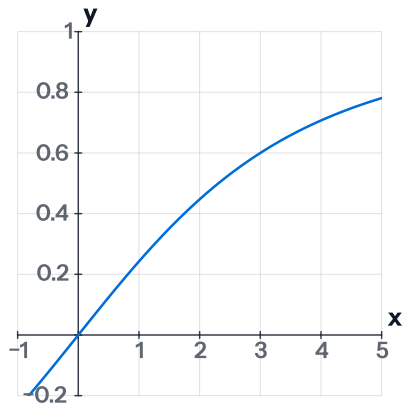
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la integral definida (es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 3).

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}\,dx$$

A) 1 **B)** 2 **C)** $\sqrt{3}$



Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Resuelve la integral indefinida con un cambio de variable.

$$\int \operatorname{sen} x\, \cos^2 x\, dx$$

A) $-\cos^3x/3 + C$ **B)** $\cos^3x/3 + C$ **C)** $-\cos^3x + C$

$\int$ sen x cos²x dx

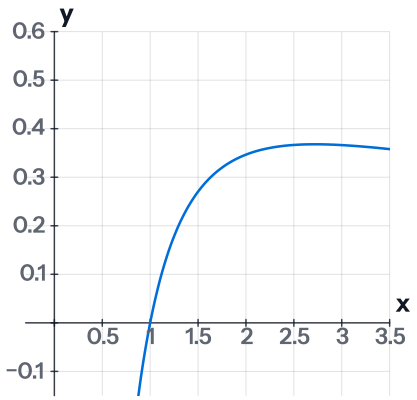
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida (es el área bajo la curva entre x = 1 y x = e).

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$$

A) 1 **B)** (e²−1)/2 **C)** 1/2



Tu procedimiento

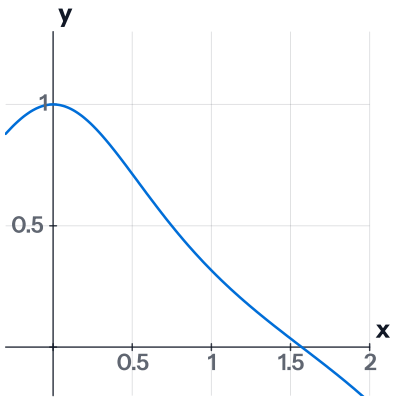
9 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida (es el área bajo la curva entre x = 0 y x = π/2).

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$$

A) ln 2 **B)** π/4 **C)** arctan(π/2)



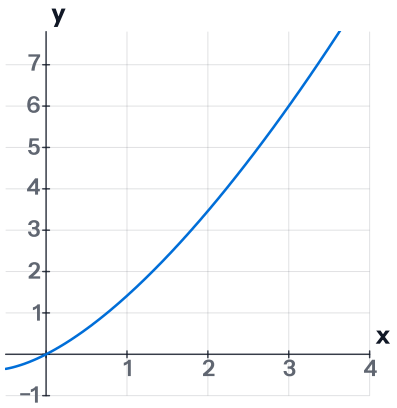
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la integral definida (es el área bajo la curva entre x = 0 y x = 3).

$$\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$$

A) 62/5 **B)** 8√3/5 **C)** 116/15



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · La integral es $(x^2+1)^4/4$ más C

1. Elige u: lo de adentro del paréntesis, cuya derivada también aparece
   $u = x^2 + 1$
   $du = 2x\,dx$
2. Reescribe toda la integral en términos de u
   $\int u^3\,du$
3. Integra con la regla de la potencia
   $= \frac{u^4}{4} + C$
4. Regresa a x sustituyendo u
   $= \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$

Ojo: $(x^2+1)^4$ olvida dividir entre 4; con $(x^2+1)^4/8$ se divide otra vez entre 2, aunque 2x dx ya era du.

Truco: Si el factor de afuera es justo la derivada de u, el cambio de variable queda limpio.

2. Respuesta A · La integral es sen(3x)/3 más C

1. Elige u: el argumento del coseno
   $u = 3x$
   $du = 3\,dx$
2. Despeja dx y sustituye
   $\int \cos u \cdot \frac{du}{3}$
3. Saca la constante e integra el coseno
   $= \frac{1}{3}\operatorname{sen} u + C$
4. Regresa a x sustituyendo u
   $= \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + C$

Ojo: 3 sen(3x) multiplica por 3 en lugar de dividir; sen(3x) olvida compensar el factor 3 de la derivada de adentro.

Truco: Si u = ax, entonces dx = du/a: la constante a divide.

3. Respuesta A · La integral es e^(x²)/2 más C

1. Elige u: el exponente, cuya derivada es casi el factor x
   $u = x^2$
   $du = 2x\,dx$
2. Despeja x dx y sustituye
   $x\,dx = \frac{du}{2}$
3. Saca el un medio e integra la exponencial
   $= \frac{1}{2}e^u + C$
4. Regresa a x sustituyendo u
   $= \frac{\exp(x^2)}{2} + C$

Ojo: 2e^(x²) multiplica por 2 en vez de dividir; e^(x²) ignora que du = 2x dx trae un 2 de más.

Truco: Si falta una constante para formar du, se compensa dividiendo entre ella.

4. Respuesta B · Solo la que lleva el factor x dx

1. Calcula du a partir de u
   $u = x^2 + 1$
   $du = 2x\,dx$
2. Para usar du, en la integral debe aparecer el factor x dx
   $x\,dx = \frac{du}{2}$
3. Con $x(x^2+1)^5$ dx todo se vuelve u
   $u^5 \cdot \frac{du}{2}$
4. En las otras dos queda una x que impide una integral sencilla en u
   $dx = \frac{du}{2x}$

Ojo: Sin el factor x no hay du; con x^2 sobra una x al despejar dx = du/(2x), y la integral sigue mezclada.

Truco: Antes de sustituir, comprueba que la derivada de u aparece como factor.

5. Respuesta C · La integral es ln(x²+1)/2 más C

1. Elige u: el denominador; su derivada es 2x
   $u = x^2 + 1$
   $du = 2x\,dx$
2. Cambia x dx por du/2
   $\int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2}$
3. Integra: uno sobre u da logaritmo
   $= \frac{1}{2}\ln|u| + C$
4. Regresa a x; $x^2 + 1$ siempre es positivo
   $= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

Ojo: ln(x²+1) olvida el un medio; ln(x²+1)/(2x) divide entre du = 2x dx completo, y x no debe quedar abajo.

Truco: Cuando el numerador es la derivada del denominador (salvo constantes), aparece un logaritmo.

6. Respuesta A · El valor es 1

1. Elige u = x² + 16; entonces du = 2x dx
   $u = x^2 + 16$
   $du = 2x\,dx$
2. Cambia los límites a u: ya no se usa x
   $x = 0 \to u = 16$
   $x = 3 \to u = 25$
3. Reescribe la integral con los límites nuevos
   $\int_{16}^{25} \frac{du}{2\sqrt{u}}$
4. La antiderivada es √u: evalúa entre 16 y 25
   $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 1$

Ojo: √3 mantiene los límites 0 y 3 en la antiderivada de u; 2 integra $1/\sqrt{u}$ y olvida el factor un medio.

Truco: Si cambias los límites a u, no regreses a x al final.

7. Respuesta A · La integral es −cos³x/3 más C

1. Elige u = cos x; du lleva un signo menos
   $$u = \cos x$$
   $$du = -\operatorname{sen} x\, dx$$
2. Despeja sen x dx y sustituye
   $$\operatorname{sen} x\, dx = -du$$
   $$\int u^2\,(-du)$$
3. Integra con la regla de la potencia
   $$= -\frac{u^3}{3} + C$$
4. Regresa a x sustituyendo u
   $$= -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Ojo: cos³x/3 pierde el signo menos de du; −cos³x olvida dividir entre 3 al integrar u².
Truco: La derivada del coseno es negativa: eso aporta un signo menos al sustituir.

8. Respuesta C · El valor es 1/2

1. Elige u = ln x; su derivada 1/x ya está en la integral
   $$u = \ln x$$
   $$du = \frac{dx}{x}$$
2. Cambia los límites a u
   $$x = 1 \to u = 0$$
   $$x = e \to u = 1$$
3. Reescribe: queda una integral muy simple en u
   $$\int_0^1 u\, du$$
4. Integra y evalúa entre 0 y 1
   $$\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Ojo: (e²−1)/2 evalúa u²/2 con los límites viejos 1 y e; 1 se olvida de dividir entre 2 al integrar u.
Truco: Si u = ln x, los límites x = 1 y x = e pasan a 0 y 1.

9. Respuesta B · El valor es π/4

1. Elige u = sen x; du = cos x dx ya está en el numerador
   $$u = \operatorname{sen} x$$
   $$du = \cos x\, dx$$
2. Cambia los límites a u
   $$x = 0 \to u = 0$$
   $$x = \pi/2 \to u = 1$$
3. Reescribe la integral en u
   $$\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}$$
4. Es la derivada del arcotangente: evalúa
   $$\arctan 1 - \arctan 0$$
   $$= \pi/4$$

Ojo: ln 2 confunde con la integral de 1/(1+u); arctan(π/2) deja el límite viejo π/2 en la antiderivada.
Truco: Reconoce la forma 1/(1+u²): su antiderivada es arctan u.

10. Respuesta C · El valor es 116/15

1. Elige u = x + 1; la x que sobra se despeja: x = u − 1
   $$u = x + 1$$
   $$x = u - 1,\ dx = du$$
2. Cambia límites y reescribe todo en u
   $$\int_1^4 (u-1)\sqrt{u}\, du$$
   $$= \int_1^4 (u^{3/2} - u^{1/2})\, du$$
3. Integra cada potencia
   $$\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}$$
4. Evalúa entre 1 y 4: (2/5)(31) y (2/3)(7)
   $$62/5 - 14/3$$
   $$= 116/15$$

Ojo: 62/5 integra u√u en vez de (u−1)√u: olvida restar; 8√3/5 evalúa en u = 3 con los límites viejos.
Truco: Si sobra una x, despéjala con la sustitución: x = u − 1.