Hipérbola como lugar geométrico

diferencia constante de distancias a dos focos y ecuación.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

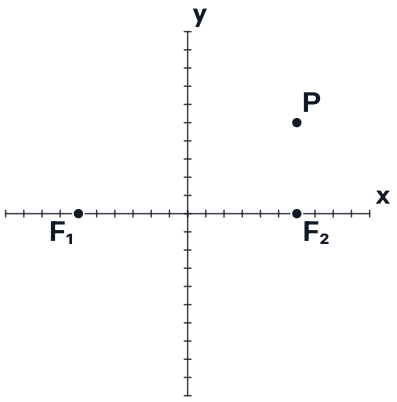
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Un punto P de una hipérbola está a 13 unidades de un foco y a 5 del otro. ¿Cuánto vale la diferencia constante de distancias a los focos?

A) 18 **B)** 8 **C)** 4

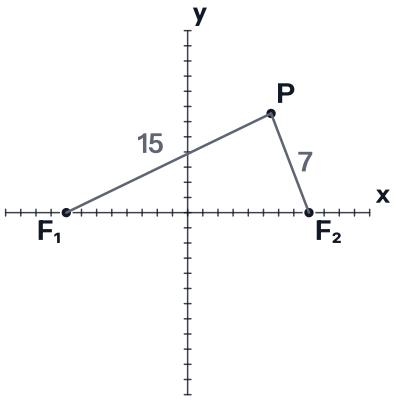


Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x tiene un punto P a 15 y a 7 unidades de sus focos. ¿En qué puntos corta la curva al eje x?

A) $(\pm 8, 0)$ **B)** $(\pm 4, 0)$ **C)** $(\pm 11, 0)$

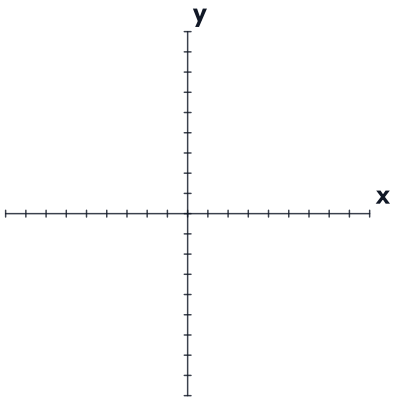


Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

En una hipérbola, a es la distancia del centro a un vértice, c la del centro a un foco, y b cumple $c^2 = a^2 + b^2$. Si a = 3 y c = 5, ¿cuánto vale b?

A) 2 **B)** $\sqrt{34}$ **C)** 4

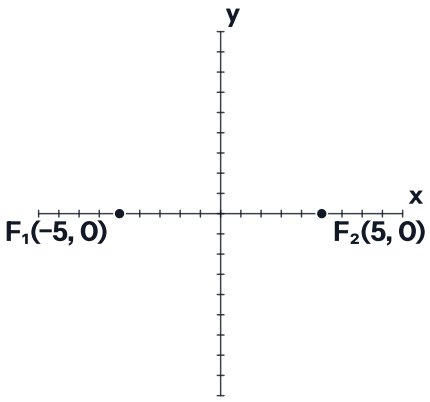


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Una hipérbola con centro en el origen tiene focos en (−5, 0) y (5, 0), y la diferencia constante de distancias a ellos es 6. ¿Cuál es su ecuación?

A) $x^2/9 - y^2/16 = 1$ **B)** $x^2/9 + y^2/16 = 1$ **C)** $x^2/9 - y^2/34 = 1$

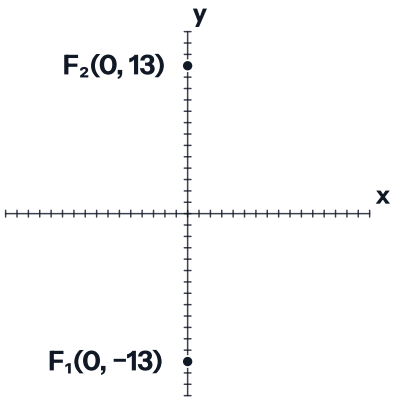


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Una hipérbola con centro en el origen tiene focos en (0, 13) y (0, −13), y la diferencia constante de distancias es 24. ¿Cuál es su ecuación?

A) $x^2/144 - y^2/25 = 1$ **B)** $y^2/144 - x^2/313 = 1$ **C)** $y^2/144 - x^2/25 = 1$

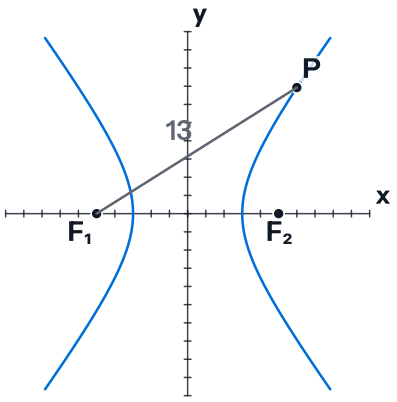


Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Una hipérbola tiene focos $F_1(-5, 0)$ y $F_2(5, 0)$ y diferencia constante 6. Un punto P de la curva está a 13 de F_1, el foco más lejano. ¿A qué distancia está de F_2?

A) 7 **B)** 19 **C)** 8

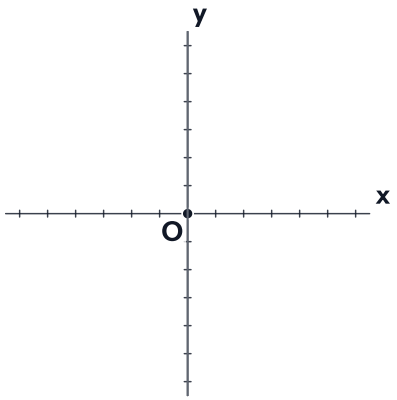


Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Una hipérbola tiene su centro en el origen y sus focos sobre el eje y. La diferencia constante de distancias a los focos es 16 y su semieje conjugado vale b = 6. ¿Dónde están los focos?

A) $(\pm 10, 0)$ **B)** $(0, \pm 10)$ **C)** $(0, \pm 2\sqrt{73})$



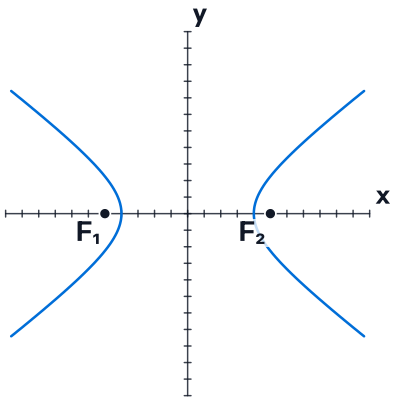
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Los focos de la hipérbola de abajo son (−5, 0) y (5, 0). Un punto P de la rama derecha tiene x = 8. ¿Cuánto mide PF_2, la distancia de P al foco (5, 0)?

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

A) 6 **B)** 14 **C)** 8

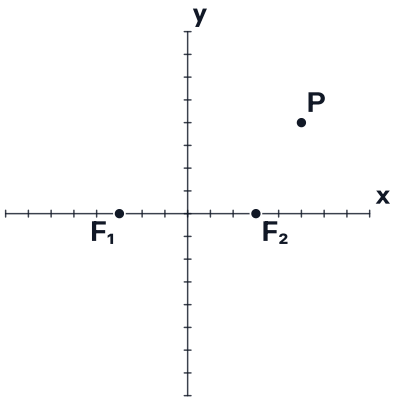


Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una hipérbola con centro en el origen tiene focos en (−3, 0) y (3, 0) y pasa por el punto (5, 4). ¿Cuál es su ecuación?

A) $x^2/4 - y^2/5 = 1$ **B)** $x^2/5 - y^2/14 = 1$ **C)** $x^2/5 - y^2/4 = 1$

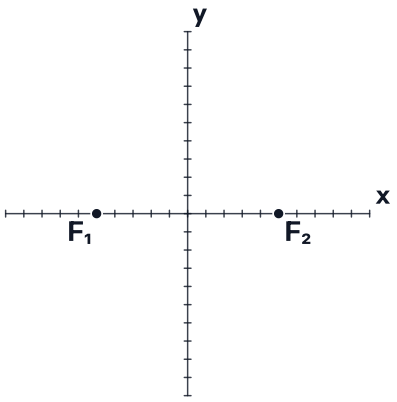


Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Dos focos están a 10 unidades uno del otro. Los puntos P cuya diferencia $|PF_1 - PF_2|$ es constante forman una hipérbola. ¿Cuál de estas diferencias constantes lo permite?

A) 6 **B)** 10 **C)** 14



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · La diferencia constante es 8

1. Las dos distancias de P a los focos son 13 y 5
   $PF_1 = 13$
   $PF_2 = 5$
2. La hipérbola resta las distancias: la mayor menos la menor
   $13 - 5 = 8$
3. Esa diferencia es la misma para todos los puntos de la curva y se llama 2a
   $|PF_1 - PF_2| = 2a = 8$

Ojo: 18 suma las distancias, como se hace en la elipse; 4 es a, la mitad de la diferencia constante.
Truco: Elipse: suma constante. Hipérbola: diferencia constante, la mayor menos la menor.

2. Respuesta B · La curva corta al eje x en los puntos (4, 0) y (−4, 0)

1. La diferencia de las distancias es 2a
   $15 - 7 = 8$
   $2a = 8$
2. Divide entre 2 para obtener a
   $a = 8 \div 2 = 4$
3. Los cortes con el eje x están a a unidades del centro, a cada lado
   $(\pm 4,\ 0)$

Ojo: (±8, 0) toma 2a como si fuera a; (±11, 0) usa (15 + 7) ÷ 2 como en una elipse.
Truco: Los vértices están a a unidades del centro, y a = (diferencia constante) ÷ 2.

3. Respuesta C · b vale 4

1. a = 3 es la distancia del centro al vértice
   $a = 3,\ c = 5$
2. Con c como hipotenusa, a y b son los catetos: $c^2 = a^2 + b^2$
   $c^2 = a^2 + b^2$
   $b^2 = c^2 - a^2$
3. Calcula b
   $b^2 = 25 - 9 = 16$
   $b = 4$

Ojo: 2 resta 5 − 3 sin elevar al cuadrado; $\sqrt{34}$ sale de sumar 25 + 9 en vez de restar.
Truco: En la hipérbola c es la hipotenusa: $c^2 = a^2 + b^2$, así que $b^2 = c^2 - a^2$.

4. Respuesta A · La ecuación es $x^2/9 - y^2/16 = 1$

1. La diferencia constante es 2a: halla a
   $2a = 6$
   $a = 3$
2. Los focos dan c = 5; calcula b^2 con $b^2 = c^2 - a^2$
   $c = 5$
   $b^2 = 25 - 9 = 16$
3. Focos en el eje x: x^2 va primero y las fracciones se restan
   $$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Ojo: Con el signo + sería una elipse; el 34 sale de sumar 25 + 9 en lugar de restar.
Truco: Hipérbola: resta entre las fracciones y $b^2 = c^2 - a^2$.

5. Respuesta C · La ecuación es $y^2/144 - x^2/25 = 1$

1. La diferencia constante es 2a: halla a
   $2a = 24$
   $a = 12$
2. Los focos dan c = 13; $b^2 = c^2 - a^2$
   $b^2 = 13^2 - 12^2$
   $b^2 = 169 - 144 = 25$
3. Los focos están sobre el eje y: y^2 va primero y x^2 se resta
   $$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Ojo: x^2 primero abriría la curva a los lados; el 313 sale de sumar 169 + 144 en vez de restar.
Truco: El término positivo es el de la variable del eje de los focos.

6. Respuesta A · P está a 7 unidades de F_2

1. Por la definición, la diferencia de las distancias es 6, y la mayor es la de F_1
   $PF_1 - PF_2 = 6$
2. Sustituye $PF_1 = 13$ y despeja
   $13 - PF_2 = 6$
   $PF_2 = 13 - 6 = 7$
3. Comprueba que existe el triángulo F_1F_2P: sus lados 13, 7 y 10 cumplen la desigualdad triangular
   $7 + 10 > 13$

Ojo: 19 suma 13 + 6 y alejaría a P de F_2; 8 resta 13 − 5 usando c, no la constante.
Truco: Diferencia constante: mayor − menor = 2a. Despeja la distancia que falta.

7. Respuesta B · Los focos están a 10 unidades del centro, sobre el eje vertical

1. La diferencia constante es 2a: halla a
   $2a = 16$
   $a = 8$
2. Con b = 6 forma el triángulo: $c^2 = a^2 + b^2$
   $c^2 = 8^2 + 6^2$
   $c^2 = 100$
3. Gira c sobre el eje y: los focos están a 10 del centro
   $c = 10$

Ojo: Tomar 16 como a da $c^2 = 256 + 36 = 292$, o sea $2\sqrt{73}$; $(\pm 10, 0)$ los pone sobre el eje x.
Truco: La diferencia constante vale 2a, no a; después usa $c^2 = a^2 + b^2$.

8. Respuesta A · PF_2 mide 6

1. Sustituye x = 8 en la ecuación para hallar la altura de P
   $\frac{8^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
2. Despeja y^2
   $y^2 = 9(4 - 1) = 27$
3. Distancia de P(8, y) al foco (5, 0), con Pitágoras
   $PF_2 = \sqrt{(8-5)^2 + 27}$
   $PF_2 = \sqrt{36} = 6$
4. Comprueba con la definición: $PF_1 = 14$ y $14 - 6 = 8 = 2a$
   $PF_1 = \sqrt{13^2 + 27} = 14$
   $14 - 6 = 8 = 2a$

Ojo: 14 es la distancia al otro foco, F_1; 8 es la diferencia constante 2a, no una distancia.
Truco: Sustituye una coordenada, calcula la otra y usa Pitágoras; la diferencia de distancias comprueba.

9. Respuesta C · La ecuación tiene $a^2 = 5$ y $b^2 = 4$

1. Distancias del punto (5, 4) a cada foco, con Pitágoras
   $PF_1 = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
   $PF_2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
2. La diferencia es 2a: halla a^2
   $2a = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
   $a^2 = 5$
3. Los focos dan c = 3: $b^2 = c^2 - a^2$
   $b^2 = 9 - 5 = 4$
4. Focos en el eje x: x^2 es el positivo
   $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

Ojo: Con 4 y 5 intercambiados se confunden a^2 y b^2; con 14 se sumó 9 + 5 en lugar de restar.
Truco: Definición primero: 2a sale de la diferencia de distancias, y $b^2 = c^2 - a^2$.

10. Respuesta A · Debe ser menor que la distancia entre focos: sirve 6

1. En el triángulo F_1F_2P, un lado no puede ser mayor que la suma de los otros dos
   $|PF_1 - PF_2| \leq F_1F_2 = 10$
2. Si la diferencia fuera 10, P quedaría sobre la recta de los focos: son dos semirrectas, no una hipérbola
   $|PF_1 - PF_2| = 10$
3. Si fuera 14, superaría a 10 y ningún punto cumpliría
   $14 > 10$
4. Con 6, menor que 10, sí hay hipérbola: a = 3
   $6 < 10$
   $2a = 6$

Ojo: 10 es justo la distancia entre focos: es el tope y da dos semirrectas; 14 lo supera y ningún punto cumple.
Truco: Para una hipérbola, $2a < 2c$: la diferencia constante es menor que la distancia entre focos.