Suma y diferencia de ángulos

sen(α±β), cos(α±β) y tan(α±β), ángulo doble y ángulo mitad aplicados a valores exactos, con construcciones geométricas y comprobación numérica.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la fórmula correcta para sen(**α** + **β**)?

A) sen α + sen β **B)** sen α cos β − cos α sen β

C) sen α cos β + cos α sen β

Expresión (α = 30°, β = 60°)	Valor

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Usa la fórmula de la resta de ángulos para calcular sen(60° − 30°).

A) 1 **B)** 1/2 **C)** (√3 − 1)/2

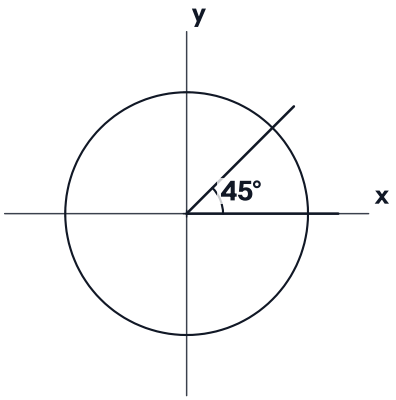
	sen	cos
30°	1/2	√3/2
60°	√3/2	1/2

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuánto vale cos(45° + 45°) si lo calculas con la fórmula de la suma?

A) 0 **B)** $\sqrt{2}$ **C)** 1

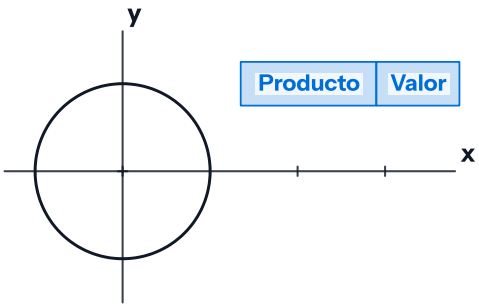


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Cuánto vale sen 75°? Usa valores exactos de 45° y 30°.

A) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ **B)** $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ **C)** $(\sqrt{2}+1)/2$

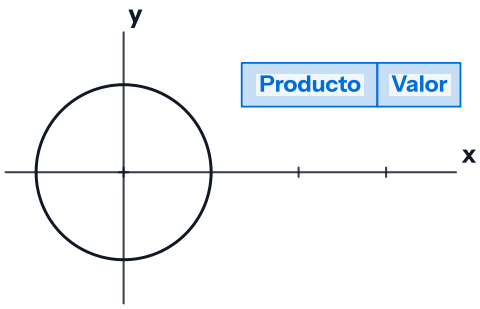


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

¿Cuánto vale cos 105°? Usa valores exactos de 60° y 45°.

A) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ **B)** $(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4$ **C)** $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$

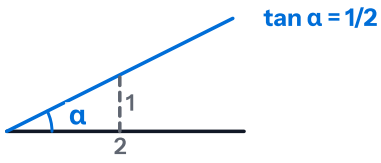


Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Los ángulos agudos **α** y **β** cumplen tan **α** = 1/2 y tan **β** = 1/3.
¿Cuánto vale tan(**α** + **β**)?

A) 5/6 **B)** 5/7 **C)** 1

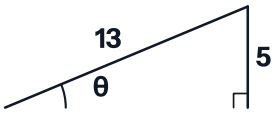


Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Un ángulo agudo θ cumple $\operatorname{sen}\theta = 5/13$. ¿Cuánto vale $\operatorname{sen} 2\theta$?

A) 120/169 **B)** 10/13 **C)** 60/169

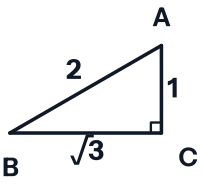


Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuánto vale $\tan 15°$? Pista: $15°$ es la mitad de $30°$.

A) $2 + \sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{3}/6$ **C)** $2 - \sqrt{3}$



Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Con la fórmula del ángulo mitad, $\tan(\theta/2) = \operatorname{sen}\theta \div (1 + \cos\theta)$, y $\theta = 45°$, ¿cuánto vale tan 22.5°?

$$\tan(\theta/2) = \operatorname{sen}\theta \div (1 + \cos\theta)$$

Cantidad	Valor

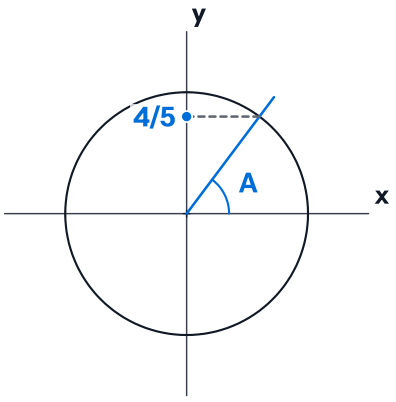
A) $\sqrt{2} - 1$ **B)** $\sqrt{2} + 1$ **C)** 1/2

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Los ángulos agudos A y B cumplen sen A = 4/5 y cos B = 5/13. ¿Cuánto vale sen(A + B)?

A) 56/65 **B)** −16/65 **C)** 4/13



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta C · sen(α + β) = sen α cos β + cos α sen β

1. Prueba con α = 30° y β = 60°: el lado izquierdo es sen 90°
   $\operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ)$
   $= \operatorname{sen} 90^\circ = 1$
2. Evalúa cada opción con los valores de 30° y 60°
   $\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = 0.5$
   $\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ$
   ≈ 0.866
3. Solo la opción con productos sumados también da 1

Ojo: Sumar los senos da 1.37 y no coincide con sen 90° = 1; con el signo menos sale −0.5, que es sen(α − β).
Truco: Una sola comprobación numérica basta para descartar una fórmula falsa.

2. Respuesta B · sen(60° − 30°) = 1/2

1. Fórmula: sen(A − B) = sen A cos B − cos A sen B, con A = 60° y B = 30°
   $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B$
   $- \cos A \operatorname{sen} B$
2. Primer producto: sen 60° por cos 30°
   $\operatorname{sen} 60^\circ \cos 30^\circ$
   $= (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) = 3/4$
3. Segundo producto: cos 60° por sen 30°
   $\cos 60^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$
   $= (1/2)(1/2) = 1/4$
4. Resta los dos productos
   $3/4 - 1/4 = 1/2$

Ojo: 1 suma los productos en lugar de restarlos; (√3 − 1)/2 resta los senos, sen 60° − sen 30°.
Truco: Compruébalo: 60° − 30° = 30°, y sen 30° = 1/2.

3. Respuesta A · cos(45° + 45°) = 0

1. Suma los ángulos: dos giros de 45° dan un giro de 90°
   $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$
2. Fórmula: cos(A + B) = cos A cos B − sen A sen B
   $\cos^2 45^\circ = 1/2$
   $\operatorname{sen}^2 45^\circ = 1/2$
3. Resta: da 0, igual que cos 90°
   $\cos 90^\circ = 1/2 - 1/2 = 0$

Ojo: √2 suma los dos cosenos; 1 suma los productos en vez de restarlos, y eso es cos 0°, no cos 90°.
Truco: En cos(A + B) el signo del medio es menos; en cos(A − B) es más.

4. Respuesta B · sen 75° = (√6 + √2)/4 ≈ 0.966

1. Escribe 75° como una suma de ángulos notables
   $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$
2. Usa sen(A + B) = sen A cos B + cos A sen B
   $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B$
   $+ \cos A \operatorname{sen} B$
3. Calcula los dos productos con valores exactos
   $\sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{6}/4$
   $\sqrt{2}/2 \cdot 1/2 = \sqrt{2}/4$
4. Suma los dos productos
   $= (\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$
   ≈ 0.966

Ojo: (√6 − √2)/4 usa el signo menos y resulta ser sen 15°; (√2 + 1)/2 suma los senos y pasa de 1, imposible.
Truco: El seno nunca pasa de 1: si tu resultado es mayor, revisa.

5. Respuesta B · cos 105° = (√2 − √6)/4 ≈ −0.259

1. Escribe 105° como una suma de ángulos notables
   $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$
2. Usa cos(A + B) = cos A cos B − sen A sen B
   $\cos(A + B) = \cos A \cos B$
   $-\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
3. Calcula los dos productos con valores exactos
   $1/2 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{2}/4$
   $\sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{2}/2 = \sqrt{6}/4$
4. Resta en ese orden: sale negativo, como se esperaba
   $= (\sqrt{2} - \sqrt{6})/4$
   ≈ -0.259

Ojo: (√6 − √2)/4 invierte la resta y pierde el signo negativo; (√6 + √2)/4 suma los productos y es cos 15°.
Truco: Antes de calcular, ubica el cuadrante: 105° está en el II, con coseno negativo.

6. Respuesta C · tan(α + β) = 1

1. Fórmula de la tangente de una suma
   $\tan(\alpha + \beta) =$
   $(\tan \alpha + \tan \beta)$
   $\div (1 - \tan \alpha \ \tan \beta)$
2. Calcula numerador y denominador por separado
   $1/2 + 1/3 = 5/6$
   $1 - (1/2)(1/3) = 5/6$
3. Divide: cualquier número entre sí mismo da 1
   $(5/6) \div (5/6) = 1$

Ojo: 5/6 es solo el numerador, falta dividir; 5/7 pone 1 + tan α tan β abajo, con el signo equivocado.
Truco: En la suma de tangentes el denominador lleva 1 menos el producto.

7. Respuesta A · sen 2θ = 120/169

1. El cateto que falta sale por Pitágoras
   $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$
2. Refleja el triángulo hacia abajo: el ángulo se duplica y queda isósceles
3. Calcula el área de dos maneras
   $A = 10 \cdot 12 \div 2 = 60$
   $A = 169 \cdot \operatorname{sen} 2\theta \div 2$
4. Iguala las áreas y despeja
   $13 \cdot 13 \cdot \operatorname{sen} 2\theta = 120$
   $\operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{120}{169}$

Ojo: 10/13 duplica el seno (2 sen θ); 60/169 es sen θ cos θ y le falta el factor 2.
Truco: Compruébalo: 2 · (5/13) · (12/13) = 120/169.

8. Respuesta C · tan 15° = 2 − √3 ≈ 0.268

1. Prolonga el cateto CB hasta D, con BD = BA = 2
2. El triángulo ABD es isósceles y su ángulo exterior en B mide 30°: los ángulos iguales miden 15°
   $30^\circ = 15^\circ + 15^\circ$
3. En el triángulo rectángulo ACD, la tangente de 15° es opuesto entre adyacente
   $\tan 15^\circ = \dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$
4. Racionaliza multiplicando por el conjugado: (2 + √3)(2 − √3) = 1
   $1 \cdot (2 - \sqrt{3}) \div (4 - 3)$
   $= 2 - \sqrt{3}$

Ojo: 2 + √3 es la razón al revés, tan 75°; √3/6 toma la mitad de tan 30°, pero la tangente no se parte.
Truco: Comprueba con tan(45° − 30°): (1 − √3/3) ÷ (1 + √3/3) = 2 − √3.

9. Respuesta A · tan 22.5° = √2 − 1 ≈ 0.414

1. Valores exactos de seno y coseno de 45°
   $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$
   $= \sqrt{2}/2$
2. Denominador: 1 + cos 45°, con denominador común 2
   $1 + \sqrt{2}/2 = (2 + \sqrt{2})/2$
3. Divide: los denominadores 2 se cancelan
   $\tan 22.5^\circ$
   $= \sqrt{2} \div (2 + \sqrt{2})$
4. Racionaliza con el conjugado 2 − √2
   $\sqrt{2}(2 - \sqrt{2}) \div (4 - 2)$
   $= (2\sqrt{2} - 2) \div 2 = \sqrt{2} - 1$

Ojo: √2 + 1 usa 1 − cos θ abajo (es tan 67.5°); 1/2 toma la mitad de tan 45°.
Truco: Revisa que sea razonable: tan 22.5° debe ser menor que tan 45° = 1.

10. Respuesta A · sen(A + B) = 56/65

1. Completa lo que falta con Pitágoras (triángulos 3-4-5 y 5-12-13)
   $\cos A = 3/5$
   $\operatorname{sen} B = 12/13$
2. Fórmula de la suma y sustitución
   $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B$
   $+ \cos A \operatorname{sen} B$
   $= 4/5 \cdot 5/13 + 3/5 \cdot 12/13$
3. Multiplica y suma: ambos productos tienen denominador 65
   $20/65 + 36/65 = 56/65$

Ojo: −16/65 resta los productos (es sen(A − B)); 4/13 es solo el primer producto, 20/65.
Truco: Comprobación: (−33/65)² + (56/65)² = 1, el punto está en el círculo.