Funciones exponencial y logarítmica

dominio, rango, gráfica y asíntotas de exponenciales y logaritmos, crecimiento, decaimiento y función inversa.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

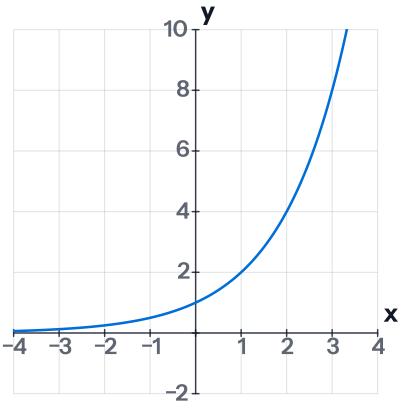
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

La función exponencial está graficada. ¿Cuál es su rango?

$$f(x) = 2^x$$

A) $y > 0$ **B)** $y \geq 0$ **C)** Todos los números reales

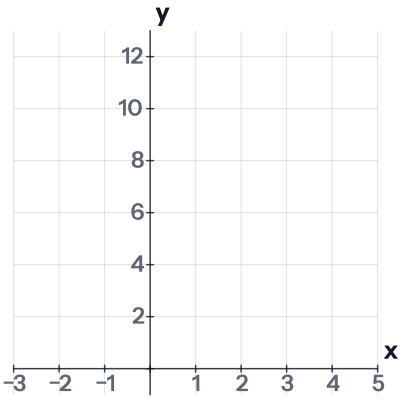


Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

¿Cuál de estas funciones modela un decaimiento exponencial, es decir, disminuye cuando x aumenta?

A) $y = 5(1.2)^x$ **B)** $y = 0.8 \cdot 5^x$ **C)** $y = 5(0.8)^x$



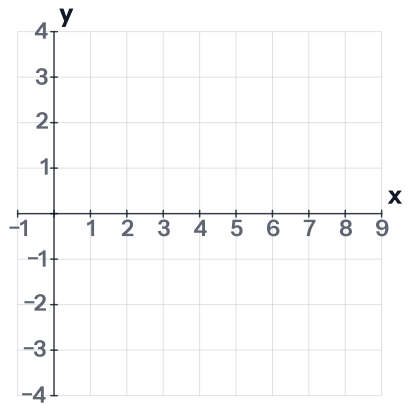
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es el dominio de la función logarítmica?

$$f(x) = \ln(x - 3)$$

A) $x > 0$ **B)** $x \geq 3$ **C)** $x > 3$



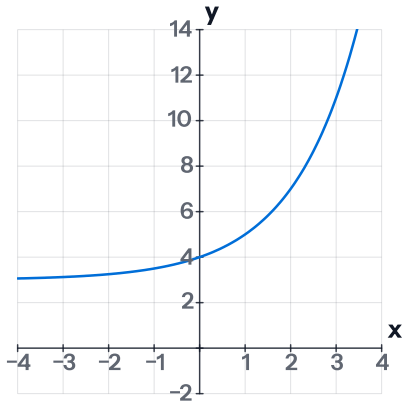
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Cuál es el rango de la función?

$$f(x) = 2^x + 3$$

A) $y > 0$ **B)** $y > 3$ **C)** $y > -3$



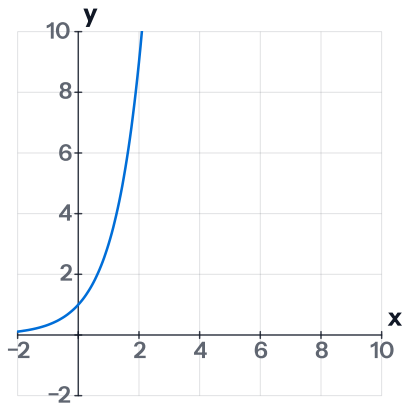
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Sea f la función dada. ¿Cuánto vale $f^{-1}(9)$?

$$f(x) = 3^x$$

A) 3 **B)** 27 **C)** 2



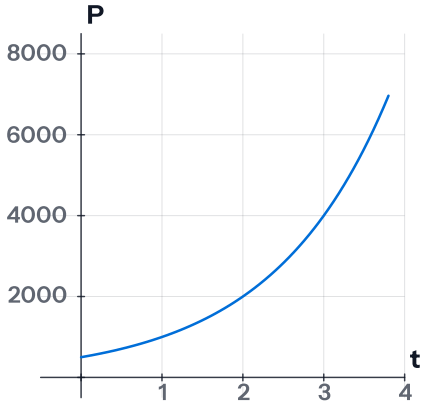
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Una colonia de bacterias tiene 500 individuos y se duplica cada hora, con t en horas. ¿Cuántos individuos habrá después de 3 horas?

$$P(t) = 500 \cdot 2^t$$

A) 4000 **B)** 3000 **C)** 1500



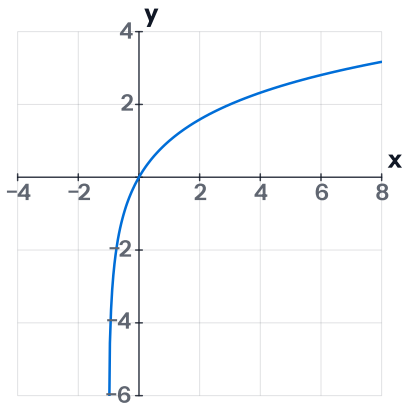
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

La gráfica muestra la función. ¿Cuál es la ecuación de su asíntota vertical?

$$f(x) = \log_2(x+1)$$

A) $x = 1$ **B)** $x = -1$ **C)** $x = 0$



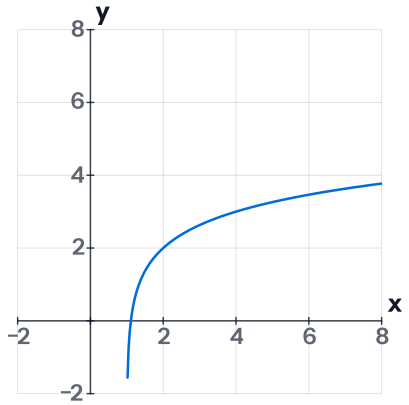
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Halla la función inversa de f.

$$f(x) = 2 + \log_3(x-1)$$

A) 3^(x − 2) − 1 **B)** 3^(x − 2) + 1 **C)** 3^(x + 2) + 1



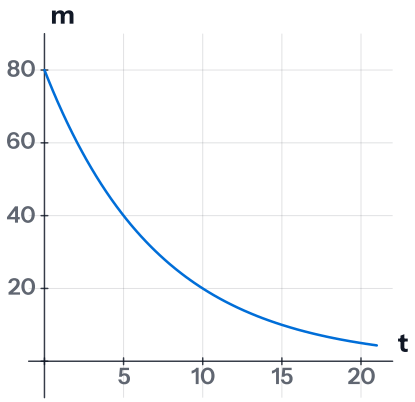
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una muestra de 80 g pierde la mitad de su masa cada 5 días. ¿Cuántos gramos quedan a los 15 días?

$$m(t) = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$$

A) 10 **B)** 40 **C)** 20

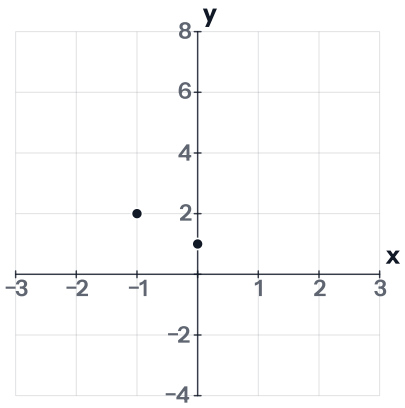


Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

La gráfica de una función exponencial pasa por los puntos (0, 1) y (−1, 2). ¿Cuál es su ecuación?

A) $y = 2^{-x}$ **B)** $y = 2^{x}$ **C)** $y = -2^{x}$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El rango es y > 0

1. Evalúa en varios puntos: las potencias de 2 salen positivas
   $2^{-1} = 0.5$
   $2^{0} = 1$
   $2^{1} = 2$
2. 2^x nunca se vuelve cero ni negativo: el eje x es una asíntota
   $2^{x} > 0$
3. Los valores de y empiezan en 0, sin tocarlo, y suben sin límite
   $y > 0$

Ojo: y ≥ 0 incluye el 0, pero 2^x nunca llega a él; «todos los reales» confunde el rango con el dominio.
Truco: El rango de una exponencial de base positiva es y > 0: la gráfica nunca toca el eje x.

2. Respuesta C · Decae y = 5(0.8)^x

1. Si la base es mayor que 1, la función crece
   $y = 5(1.2)^{x}$
   $1.2 > 1 \Rightarrow \text{crece}$
2. Si la base está entre 0 y 1, la función decae
   $y = 5(0.8)^{x}$
   $0 < 0.8 < 1 \Rightarrow \text{decae}$
3. En la tercera, el 0.8 es solo un coeficiente: la base es 5
   $y = 0.8 \cdot 5^{x}$
   $5 > 1 \Rightarrow \text{crece}$

Ojo: 5(1.2)^x tiene base mayor que 1; 0.8 · 5^x toma el 0.8, un coeficiente, por la base, que es 5.
Truco: Mira la base de la potencia: mayor que 1 crece, entre 0 y 1 decae. Un número que multiplica no es la base.

3. Respuesta C · El dominio es x > 3

1. El argumento de un logaritmo debe ser positivo
   $x - 3 > 0$
2. Despeja x: suma 3 en los dos lados
   $x > 3$
3. Comprueba: x = 4 da ln 1 = 0, un valor válido
   $f(4) = \ln(1) = 0$

Ojo: x > 0 es el dominio de ln x sin el desplazamiento; x ≥ 3 incluye el 3, donde el argumento vale 0.
Truco: Dominio de ln(u): u > 0, con desigualdad estricta.

4. Respuesta B · El rango es y > 3

1. Parte de 2^x, que siempre es positivo
   $2^{x} > 0$
2. Sumar 3 sube toda la gráfica 3 unidades, y la asíntota con ella
   $2^{x} + 3 > 0 + 3$
3. Comprueba: f(0) = 1 + 3 = 4, mayor que 3
   $f(0) = 1 + 3 = 4$

Ojo: y > 0 es el rango de 2^x sin el +3; y > −3 resta el desplazamiento en vez de sumarlo.
Truco: Sumar k a una exponencial sube su asíntota a y = k, y el rango queda y > k.

5. Respuesta C · $f^{-1}(9)$ vale 2

1. $f^{-1}(9)$ pregunta: ¿a qué exponente se eleva 3 para obtener 9?
   $3^{?} = 9$
2. Como $3^2 = 9$, el exponente buscado es 2
   $3^{2} = 9$
3. La inversa refleja los puntos: (2, 9) pasa a (9, 2)
   $f^{-1}(9) = \log_3 9 = 2$

Ojo: 3 divide 9 entre la base en lugar de buscar el exponente; 27 calcula f(3), no la inversa.
Truco: La inversa de la exponencial es el logaritmo: log base b de y responde a qué exponente se eleva b para dar y.

6. Respuesta A · Habrá 4000 individuos

1. En t = 0 hay 500: es el valor inicial
   $P(0) = 500 \cdot 2^{0} = 500$
2. Cada hora se multiplica por 2, no se le suma 500
   $P(1) = 1000$
   $P(2) = 2000$
3. Con t = 3, la potencia es $2^3 = 8$, no 2 · 3
   $P(3) = 500 \cdot 2^{3}$
   $= 500 \cdot 8 = 4000$

Ojo: 3000 calcula 2 × 3 en vez de 2^3; 1500 trata el crecimiento como lineal, 500 por 3.
Truco: En a · b^t, el exponente t actúa sobre la base b; no se multiplica por ella.

7. Respuesta B · La asíntota es x = −1

1. $\log_2 x$ tiene su asíntota en x = 0; sumar 1 adentro mueve la gráfica a la izquierda
   $$\log_2 x \to \log_2(x+1)$$
2. La asíntota está donde el argumento vale 0
   $$x + 1 = 0$$
   $$x = -1$$
3. Comprueba: f(0) = $\log_2 1$ = 0, a la derecha de la asíntota
   $$f(0) = \log_2 1 = 0$$

Ojo: x = 1 pierde el signo al despejar x + 1 = 0; x = 0 es la asíntota sin desplazar.
Truco: La asíntota vertical de log(u) está donde u = 0.

8. Respuesta B · La inversa es f⁻¹(x) = 3^(x − 2) + 1

1. Cambia f(x) por y e intercambia x con y
   $$y = 2 + \log_3(x-1)$$
   $$x = 2 + \log_3(y-1)$$
2. Aísla el logaritmo y pásalo a forma exponencial
   $$x - 2 = \log_3(y-1)$$
   $$3^{x-2} = y - 1$$
   $$y = 3^{x-2} + 1$$
3. Comprueba: f(4) = 3, y la inversa lleva 3 de vuelta a 4
   $$f(4) = 2 + \log_3 3 = 3$$
   $$f^{-1}(3) = 3^1 + 1 = 4$$

Ojo: 3^(x−2) − 1 pasa el 1 con signo contrario; 3^(x+2) + 1 suma 2 al aislar el logaritmo en vez de restarlo.
Truco: Para invertir, intercambia x y y, aísla el logaritmo y pasa a forma exponencial.

9. Respuesta A · Quedan 10 g

1. En t = 0 la masa es 80 g
   $$m(0) = 80$$
2. Cada 5 días la masa se reduce a la mitad
   $$m(5) = 40$$
   $$m(10) = 20$$
3. 15 días son 3 periodos: el exponente es 3
   $$m(15) = 80 \cdot (1/2)^3$$
   $$= 80 \div 8 = 10$$

Ojo: 40 solo aplica una mitad; 20 cuenta dos mitades en vez de tres.
Truco: Divide el tiempo entre la vida media: ese cociente es el exponente.

10. Respuesta A · La ecuación es y = 2^(−x)

1. Prueba y = 2^x: en x = −1 da 0.5, no 2
   $$y = 2^x$$
   $$y(-1) = 0.5 \neq 2$$
2. Prueba y = −2^x: en x = 0 da −1, no 1
   $$y = -2^x$$
   $$y(0) = -1 \neq 1$$
3. Prueba y = 2^(−x): pasa por los dos puntos
   $$y(0) = 2^0 = 1$$
   $$y(-1) = 2^1 = 2$$

Ojo: 2^x pasa por (0, 1), pero en x = −1 da 0.5; −2^x ni siquiera pasa por (0, 1).
Truco: Para identificar una ecuación, prueba cada opción en todos los puntos dados.