Elipse como lugar geométrico

elipse: suma constante de distancias a los focos y deducción de su ecuación.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

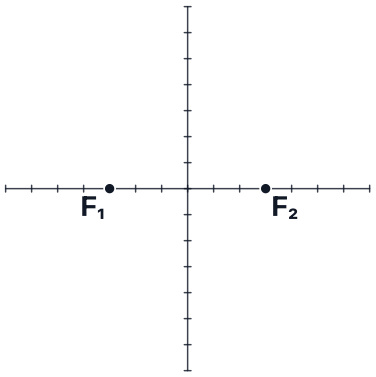
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Los focos de una elipse son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$, y la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a ellos es 10. ¿Cuánto vale a, el semieje mayor?

A) 5 **B)** 10 **C)** 4

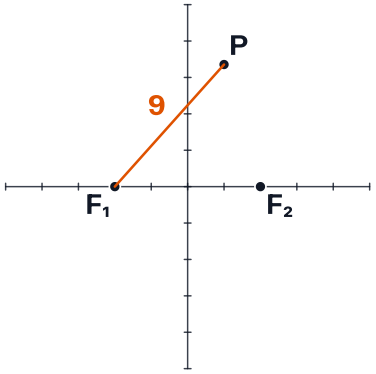


Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

La suma constante de distancias de una elipse es 16. Un punto P de la elipse está a 9 unidades del foco F_1. ¿A qué distancia está P del otro foco, F_2?

A) 25 **B)** 7 **C)** 8



Tu procedimiento

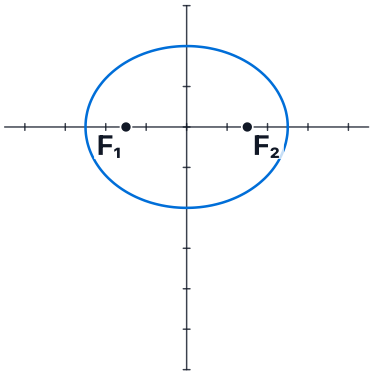
3 NIVEL FÁCIL

¿Qué cumple todo punto de una elipse?

A) La diferencia de sus distancias a los focos es constante

B) Está a igual distancia de un foco y de una recta fija

C) La suma de sus distancias a los focos es constante

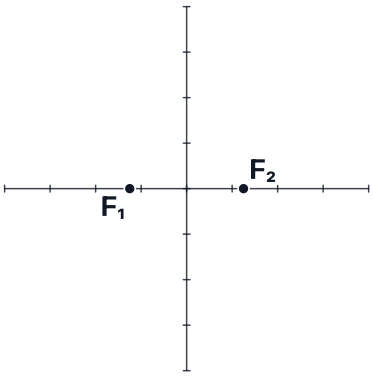


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Los focos de una elipse son (−5, 0) y (5, 0), y la suma de las distancias de cualquier punto a ellos es 26. ¿Cuánto mide b, el semieje menor?

A) 24 **B)** $\sqrt{194}$ **C)** 12

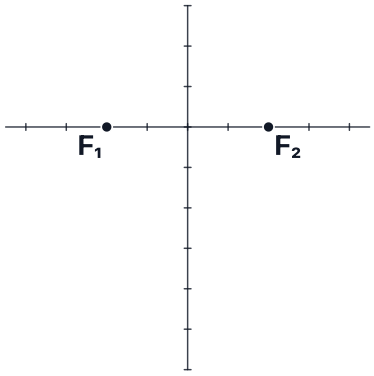


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Los focos de una elipse son (−4, 0) y (4, 0), y la suma constante de distancias es 10. ¿Cuál de estos puntos está sobre la elipse?

A) $(0, 4)$ **B)** $(0, 3)$ **C)** $(0, 5)$

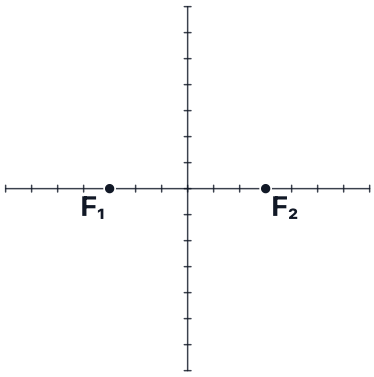


Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Un jardinero amarra los extremos de una cuerda de 20 m a dos estacas separadas 12 m. Con un palo que la mantiene tensa traza una elipse. ¿Cuánto mide su eje menor?

A) 16 m **B)** 20 m **C)** 8 m



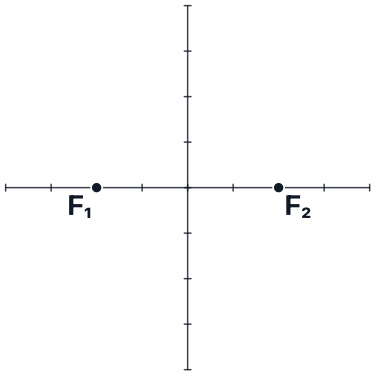
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Un punto P de la elipse de abajo está a 4 unidades de uno de los focos. ¿A qué distancia está P del otro foco?

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

A) 8 **B)** 2 **C)** 16

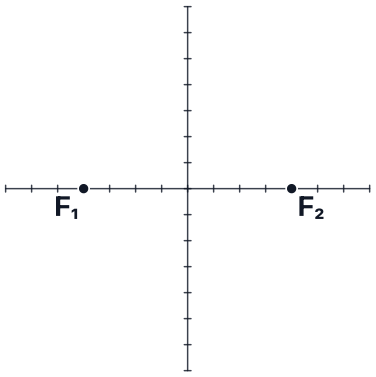


Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Una elipse con centro en el origen tiene focos en el eje x, a 8 unidades uno del otro. Un punto suyo está a 4 unidades de un foco y a 6 del otro. ¿Cuál es su ecuación?

A) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1$ **B)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **C)** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{41} = 1$

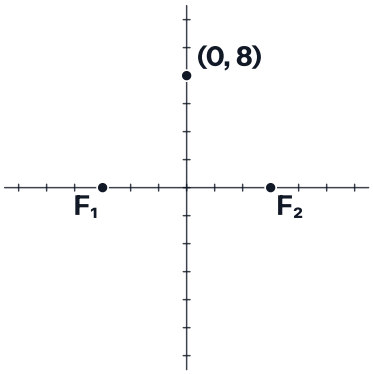


Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una elipse con centro en el origen tiene sus focos en (−6, 0) y (6, 0) y pasa por el punto (0, 8). ¿Cuál es su ecuación?

A) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$ **B)** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ **C)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$



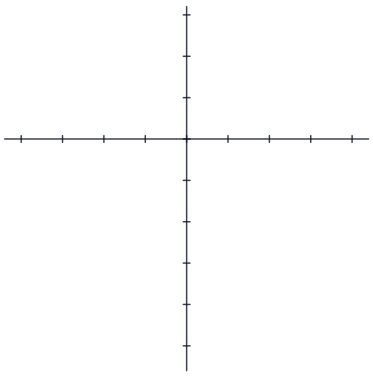
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Los focos de la elipse de abajo son F_1 y F_2. Si P es un punto cualquiera de la elipse que no está sobre el eje x, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo F_1PF_2?

$$\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$$

A) 50 **B)** 34 **C)** 42



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · a vale 5

1. Mide las distancias de un punto de la elipse a los focos y súmalas
   $3.2 + 6.8 = 10$
2. Esa suma constante es 2a, la longitud del eje mayor
   $2a = 10$
3. Divide entre 2 para obtener el semieje
   $a = \frac{10}{2} = 5$

Ojo: 10 es la suma, o sea 2a, no a; 4 es b, que sale de $a^2 - c^2 = 25 - 9$.
Truco: La suma constante de distancias es 2a: divide entre 2.

2. Respuesta B · A 7 unidades de F_2

1. Por definición, las dos distancias de P a los focos suman la constante
   $d_1 + d_2 = 16$
2. Sustituye la distancia conocida, $d_1 = 9$
   $9 + d_2 = 16$
3. Despeja d_2 restando
   $d_2 = 16 - 9 = 7$

Ojo: 25 resulta de sumar 9 + 16 en lugar de restar; 8 es a, la mitad de la suma constante.
Truco: Para hallar la otra distancia, resta de la suma constante.

3. Respuesta C · La suma de distancias a los focos es constante

1. Toma un punto P_1 y mide sus distancias a los focos
   $3.2 + 6.8 = 10$
2. Toma otro punto, P_2, y repite
   $5 + 5 = 10$
3. Con un tercer punto la suma sigue igual; en cambio la diferencia fue 3.6, 0 y 4.8
   $2.6 + 7.4 = 10$

Ojo: La diferencia constante define la hipérbola; igual distancia a un foco y a una recta define la parábola.
Truco: Elipse: suma constante de distancias a los focos.

4. Respuesta C · b mide 12

1. La suma constante es 2a: divide entre 2
   $2a = 26$
   $a = 13$
2. El extremo del eje menor está a distancia a de cada foco: forma un triángulo rectángulo con c y b
   $b^2 + c^2 = a^2$
   $b^2 + 5^2 = 13^2$
3. Despeja b^2 y saca la raíz
   $b^2 = 169 - 25 = 144$
   $b = 12$

Ojo: 24 es el eje menor completo (2b); $\sqrt{194}$ resulta de sumar 169 + 25 en lugar de restar.
Truco: Con a y c, $b^2 = a^2 - c^2$: se resta.

5. Respuesta B · El punto (0, 3) está en la elipse

1. Prueba (0, 4): suma sus distancias a los focos y compara con 10
   $d = \sqrt{4^2 + 4^2} \approx 5.66$
   $2d \approx 11.31$
2. Prueba (0, 5): la suma sale todavía mayor
   $d = \sqrt{4^2 + 5^2} \approx 6.40$
   $2d \approx 12.81$
3. Prueba (0, 3): cada distancia mide 5, y 5 + 5 = 10
   $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
   $2d = 10$

Ojo: (0, 5) usa a como altura, pero la elipse llega solo a b = 3; (0, 4) usa c y suma 11.31, no 10.
Truco: Un punto está en la elipse si la suma de sus distancias a los focos es la constante.

6. Respuesta A · El eje menor mide 16 m

1. La cuerda tensa suma siempre las dos distancias a las estacas: esa suma constante es 2a
   $2a = 20$
   $a = 10$
2. Las estacas son los focos: la distancia entre ellas es 2c
   $2c = 12$
   $c = 6$
3. En el triángulo rectángulo, a es la hipotenusa: despeja b
   $b^2 = 10^2 - 6^2 = 64$
   $b = 8$
4. El eje menor completo mide 2b
   $2b = 2 \cdot 8 = 16$

Ojo: 20 m es el eje mayor (la cuerda mide 2a); 8 m es b, el semieje menor, sin duplicar.
Truco: Cuerda = 2a y distancia entre estacas = 2c; luego $b^2 = a^2 - c^2$.

7. Respuesta A · P está a 8 unidades del otro foco

1. El denominador mayor es a²: a = 6
   $a^2 = 36$
   $a = 6$
2. La suma constante de distancias a los focos es 2a
   $d_1 + d_2 = 2a = 12$
3. Resta la distancia conocida de la suma constante
   $4 + d_2 = 12$
   $d_2 = 8$

Ojo: 2 resulta de restar 6 − 4 (usa a en vez de 2a); 16 resulta de sumar 12 + 4.
Truco: La suma constante es 2a, no a.

8. Respuesta B · x²/25 + y²/9 = 1

1. La suma de las distancias es 2a
   $2a = 4 + 6 = 10$
   $a = 5$
2. Los focos están a 8: 2c = 8, así que c = 4; usa b² = a² − c²
   $c = 4$
   $b^2 = 25 - 16 = 9$
3. Con los focos sobre el eje x, a² va bajo x² y b² bajo y²
   $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Ojo: Con 100 y 84 se usó la suma 10 como a; con 41 se sumó 25 + 16 en lugar de restar.
Truco: Suma de distancias = 2a; distancia entre focos = 2c.

9. Respuesta C · x²/100 + y²/64 = 1

1. Mide la distancia del punto a cada foco
   $d_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
   $d_2 = 10$
2. La suma constante es 2a, así que a² = 100
   $2a = 10 + 10 = 20$
   $a = 10$
3. Calcula b² con c = 6 y escribe la ecuación, con a² bajo x²
   $b^2 = 100 - 36 = 64$
   $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

Ojo: x²/64 + y²/28 toma 8 como a; x²/64 + y²/100 pone el denominador mayor bajo y² aunque los focos están en el eje x.
Truco: Con focos en el eje x, el denominador mayor va bajo x².

10. Respuesta A · El perímetro es 50

1. Lee a² y b², y calcula c: los focos quedan sobre el eje x
   $a = 17,\ b = 15$
   $c^2 = 289 - 225 = 64$
   $c = 8$
2. Para cualquier P, las dos distancias a los focos suman 2a
   $d_1 + d_2 = 2a = 34$
3. El tercer lado es la distancia entre los focos, 2c; suma los tres lados
   $2c = 16$
   $34 + 16 = 50$

Ojo: 34 omite el lado entre los focos (2c); 42 suma solo c = 8 en lugar de 2c = 16.
Truco: Perímetro del triángulo focal: 2a + 2c.