Ecuaciones de la tangente y de la normal

pendiente de la tangente en un punto, ecuación de la tangente y de la normal a una curva.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

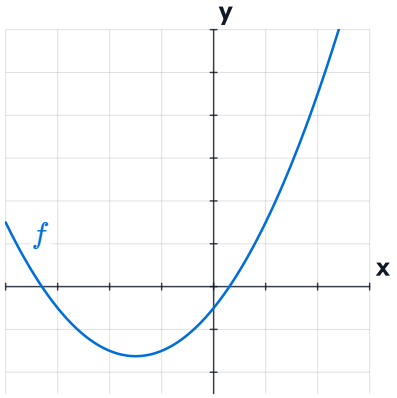
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en x = 1?

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

A) 3 **B)** 2 **C)** 5



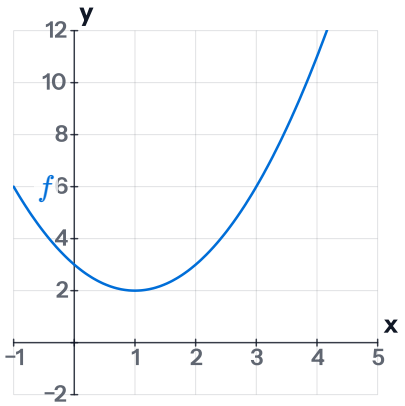
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 2?

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

A) $y = 2x + 3$ **B)** $y = 2x - 1$ **C)** $y = 2x - 4$



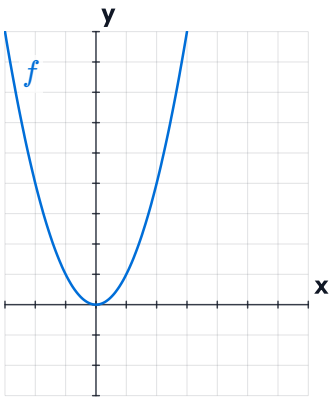
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

La normal es la recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. ¿Cuál es su pendiente en x = 2?

$$f(x) = x^2$$

A) −1/4 **B)** -4 **C)** 1/4



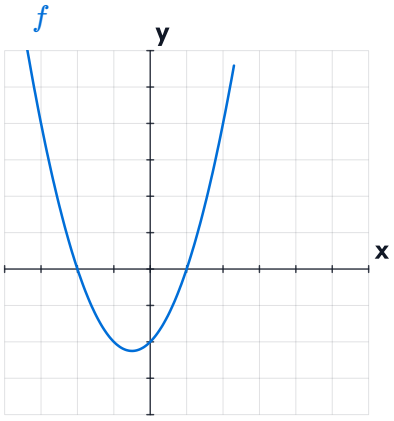
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en x = 1?

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

A) y = 3x − 3 **B)** y = −x/3 + 1/3 **C)** y = x/3 − 1/3



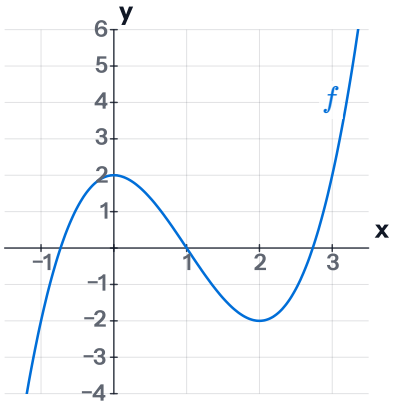
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 1?

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

A) $y = 3x - 3$ **B)** $y = -3x$ **C)** $y = -3x + 3$



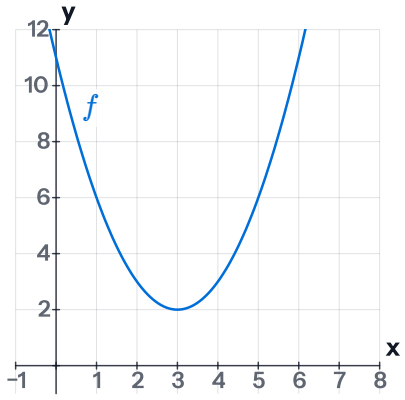
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente tiene pendiente 2?

$$f(x) = x^2 - 6x + 11$$

A) $(4, 3)$ **B)** $(2, 3)$ **C)** $(4, 2)$



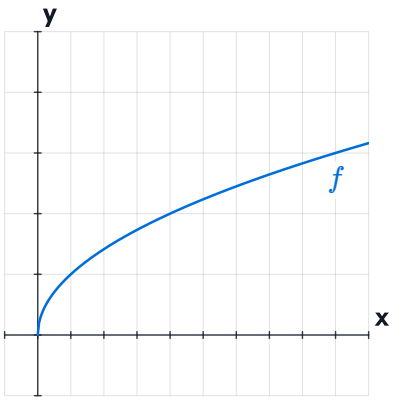
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 4?

$$f(x) = \sqrt{x}$$

A) y = x/4 + 2 **B)** y = 4x − 14 **C)** y = x/4 + 1



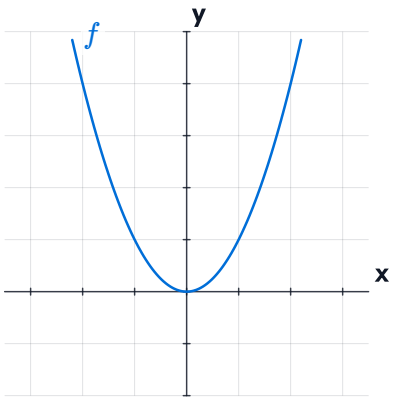
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

La recta normal a la gráfica de f en el punto (1, 1) corta el eje y. ¿En qué valor de y lo corta?

$$f(x) = x^2$$

A) 3/2 **B)** -1 **C)** 1/2



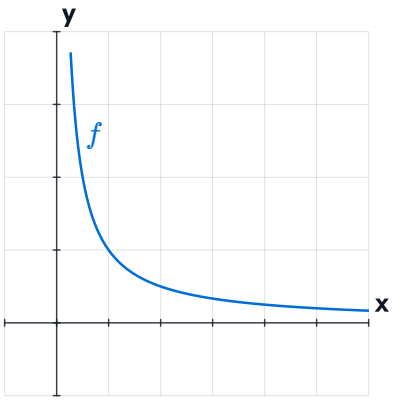
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x = 2?

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

A) y = −x/4 + 1/2 **B)** y = −x/4 + 1 **C)** y = 4x − 15/2



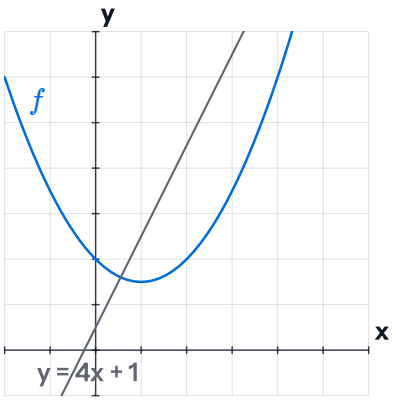
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Rectas paralelas tienen la misma pendiente. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que es paralela a y = 4x + 1?

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

A) $y = 4x - 5$ **B)** $y = 4x + 1$ **C)** y = −x/4 + 31/4



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta C · La pendiente es 5

1. Ubica el punto de la gráfica en x = 1
   $f(1) = 1 + 3 - 1 = 3$
2. Deriva y evalúa en x = 1: eso es la pendiente
   $f'(x) = 2x + 3$
   $f'(1) = 5$
3. La tangente sube 5 por cada 1 que avanza
   $m = 5$

Ojo: El 3 es la altura f(1), no la pendiente; el 2 deriva solo x^2 y olvida la derivada de 3x.
Truco: La pendiente de la tangente en x = a es f′(a), no f(a).

2. Respuesta B · La tangente es y = 2x − 1

1. Calcula la altura del punto de tangencia
   $f(2) = 4 - 4 + 3 = 3$
   $\text{punto: } (2, 3)$
2. La pendiente es la derivada evaluada en x = 2
   $f'(x) = 2x - 2$
   $f'(2) = 2$
3. Usa la forma punto-pendiente y despeja y
   $y - 3 = 2(x - 2)$
   $y = 2x - 1$

Ojo: y = 2x + 3 usa la altura 3 como ordenada al origen; y = 2x − 4 intercambia las coordenadas del punto.
Truco: Punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$, con $y_0 = f(x_0)$ y $m = f'(x_0)$.

3. Respuesta A · La pendiente de la normal es −1/4

1. Calcula la pendiente de la tangente en x = 2
   $f'(x) = 2x$
   $m_t = f'(2) = 4$
2. La normal es perpendicular: su pendiente es el opuesto del inverso
   $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{4}$
3. Comprueba: el producto de las pendientes es −1
   $4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

Ojo: −4 solo cambia el signo; 1/4 solo invierte la pendiente. La normal necesita las dos cosas.
Truco: Normal: m_n = −1 / m_t (invierte y cambia de signo).

4. Respuesta B · La normal es y = −x/3 + 1/3

1. Calcula el punto de tangencia
   $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
   $\text{punto: } (1, 0)$
2. Pendiente de la tangente: f′(1)
   $f'(x) = 2x + 1$
   $m_t = f'(1) = 3$
3. La pendiente de la normal es el opuesto del inverso
   $m_n = -\frac{1}{3}$
4. Ecuación de la normal
   $y - 0 = -(x - 1) \div 3$
   $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

Ojo: y = 3x − 3 es la tangente, no la normal; y = x/3 − 1/3 invierte la pendiente pero no cambia su signo.
Truco: Primero la tangente (m_t = f′), luego la normal (−1/m_t) con el mismo punto.

5. Respuesta C · La tangente es y = −3x + 3

1. Calcula el punto de tangencia
   $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$
   $\text{punto: } (1, 0)$
2. La pendiente es f′(1)
   $f'(x) = 3x^2 - 6x$
   $f'(1) = 3 - 6 = -3$
3. Punto-pendiente y despeja y
   $y - 0 = -3(x - 1)$
   $y = -3x + 3$

Ojo: y = 3x − 3 pierde el signo de la derivada; y = −3x omite el +3 que sale de distribuir −3(x − 1).
Truco: Después de distribuir $m(x - x_0)$, no olvides el término $-m \cdot x_0$.

6. Respuesta A · El punto es (4, 3)

1. La pendiente de la tangente en cada punto es f′(x)
   $f'(x) = 2x - 6$
2. Iguala f′(x) a la pendiente pedida y despeja x
   $2x - 6 = 2$
   $x = 4$
3. Calcula la ordenada con f(4)
   $f(4) = 16 - 24 + 11 = 3$

Ojo: (2, 3) resuelve 2x − 6 = −2, con pendiente negativa; (4, 2) usa la pendiente 2 como altura del punto.
Truco: La abscisa sale de f′(x) = m; la ordenada, de f(x).

7. Respuesta C · La tangente es y = x/4 + 1

1. Calcula el punto de tangencia
   $f(4) = \sqrt{4} = 2$
   $\text{punto: } (4, 2)$
2. Deriva la raíz como potencia 1/2 y evalúa en x = 4
   $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
   $f'(4) = \dfrac{1}{4}$
3. Punto-pendiente y despeja y
   $y - 2 = (x - 4) \div 4$
   $y = \dfrac{x}{4} + 1$

Ojo: y = x/4 + 2 usa f(4) = 2 como ordenada al origen; y = 4x − 14 invierte la pendiente 1/4.
Truco: f′ de $\sqrt{x}$ es $1/(2\sqrt{x})$. Evalúa siempre en el punto antes de escribir la recta.

8. Respuesta A · La normal corta el eje y en 3/2

1. Pendiente de la tangente en x = 1
   $f'(x) = 2x$
   $m_t = f'(1) = 2$
2. La normal tiene la pendiente opuesta e inversa
   $m_n = -\dfrac{1}{2}$
3. Escribe la normal y haz x = 0
   $y - 1 = -(1/2)(x - 1)$
   $x = 0: \; y = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Ojo: −1 es donde corta la tangente, no la normal; 1/2 usa la pendiente +1/2, sin cambiar el signo.
Truco: El corte con el eje y sale de hacer x = 0 en la ecuación de la recta.

9. Respuesta B · La tangente es y = −x/4 + 1

1. Calcula el punto de tangencia
   $f(2) = \dfrac{1}{2}$
2. Deriva 1/x = x^{-1} y evalúa en x = 2
   $f'(x) = -x^{-2}$
   $f'(2) = -\dfrac{1}{4}$
3. Punto-pendiente, distribuye y despeja y
   $y - 1/2 = -(1/4)(x - 2)$
   $y = -\dfrac{x}{4} + 1$

Ojo: y = −x/4 + 1/2 usa f(2) como ordenada al origen; y = 4x − 15/2 es la normal, de pendiente 4.
Truco: Al distribuir −(1/4)(x − 2) aparece +1/2: súmalo al 1/2 del punto.

10. Respuesta A · La tangente es y = 4x − 5

1. La tangente buscada tiene la pendiente de la recta dada
   $m = 4$
2. Resuelve f′(x) = 4 para hallar el punto
   $f'(x) = 2x - 2 = 4$
   $x = 3, \quad f(3) = 7$
3. Punto-pendiente con m = 4 y el punto (3, 7)
   $y - 7 = 4(x - 3)$
   $y = 4x - 5$

Ojo: y = 4x + 1 es la recta dada: corta la curva en dos puntos, no es tangente; la tercera es la normal.
Truco: Paralela: misma pendiente. Perpendicular (normal): la opuesta e inversa.