Derivadas sucesivas

segunda, tercera y n-ésima derivada de polinomios y funciones elementales; aceleración y concavidad.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

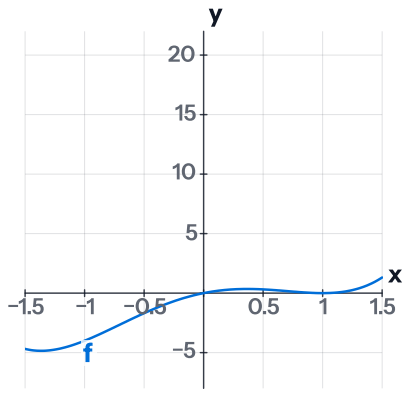
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Calcula la segunda derivada de la función. Deriva dos veces, término por término.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$$

A) $12x^2 - 6$ **B)** $4x^3 - 6x + 2$ **C)** $12x^2 - 6x$



Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Calcula la tercera derivada de f. Deriva tres veces, una después de otra.

$$f(x) = 2x^5 - x^3 + 4x$$

f(x)	$2x^5 - x^3 + 4x$

A) $40x^3 - 6x$ **B)** $120x^2$ **C)** $120x^2 - 6$

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuánto vale la cuarta derivada de f? Cada derivada baja un grado al polinomio.

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$$

Derivada	Expresión	Grado

A) 0 **B)** 72 **C)** 24

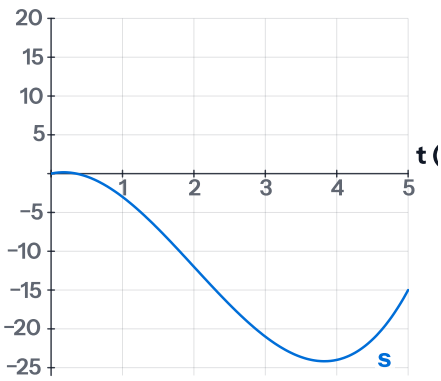
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

La posición de una partícula, en metros, es s(t), con t en segundos. ¿Cuál es su aceleración en t = 3 s?

$$s(t) = t^3 - 6t^2 + 2t$$

A) -7 m/s² **B)** 18 m/s² **C)** 6 m/s²



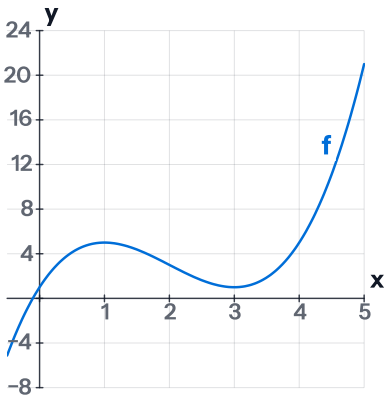
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

¿En qué intervalo la gráfica de f es cóncava hacia arriba? Es decir, donde f″(x) > 0.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

A) x > 2 **B)** x < 2 **C)** x < 1 o x > 3



Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula la tercera derivada de f. Cada derivada añade un factor por la regla de la cadena.

$$f(x) = e^{3x}$$

A) $9e^{3x}$ **B)** $27e^{3x}$ **C)** e^{3x}

$$\frac{e^{3x}}{f}$$

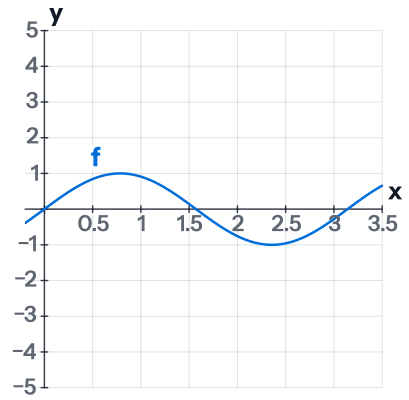
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula la segunda derivada de la función. Recuerda la regla de la cadena en cada derivada.

$$f(x) = \text{sen}(2x)$$

A) −2 sen 2x **B)** 4 sen 2x **C)** −4 sen 2x



Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula la segunda derivada de f. Usa la regla del producto en cada derivada.

$$f(x) = x\,e^x$$

A) $(x+1)e^x$ **B)** $(x+2)e^x$ **C)** $x\,e^x$

f(x)	$x\,e^x$

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuánto vale la séptima derivada de f? Deriva varias veces hasta encontrar el ciclo.

$$f(x) = \text{sen}\,x$$

A) −cos x **B)** cos x **C)** −sen x

n	$f^{(n)}(x)$

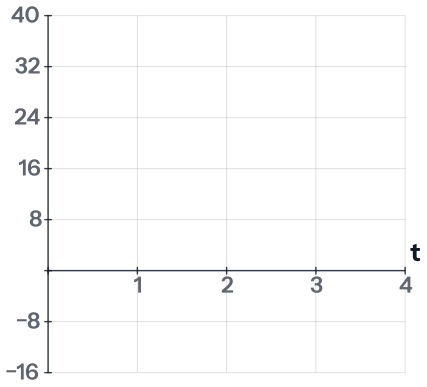
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

La posición de una partícula, en metros, es s(t), con t ≥ 0 en segundos. ¿En qué instantes la aceleración es cero?

$$s(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2$$

A) t = 1 s y t = 3 s **B)** t = 0 s y t = 3 s **C)** t = 2 s



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · f″(x) = 12x² − 6

1. Deriva una vez, término por término
   $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$
2. Deriva el resultado otra vez
   $f''(x) = 12x^2 - 6$
3. Comprueba en x = 1
   $f''(1) = 12 - 6 = 6$

Ojo: 4x³ − 6x + 2 es solo la primera derivada; 12x² − 6x deja sin derivar el término −6x.

Truco: Segunda derivada = derivar dos veces seguidas: cada una baja un grado al polinomio.

2. Respuesta C · f‴(x) = 120x² − 6

1. Primera derivada
   $f'(x) = 10x^4 - 3x^2 + 4$
2. Segunda derivada
   $f''(x) = 40x^3 - 6x$
3. Tercera derivada
   $f'''(x) = 120x^2 - 6$

Ojo: 40x³ − 6x es la segunda derivada: falta una; 120x² olvida que −6x también se deriva (da −6).

Truco: Cuenta las derivadas: tres veces significa tres renglones, no dos.

3. Respuesta B · La cuarta derivada vale 72

1. Deriva dos veces
   $f'(x) = 12x^3 - 4x$
   $f''(x) = 36x^2 - 4$
2. Tercera derivada
   $f'''(x) = 72x$
3. Cuarta derivada: una constante
   $f^{(4)}(x) = 72$

Ojo: 0 sería la quinta derivada, no la cuarta; 24 es 4·3·2·1 y olvida el coeficiente 3.

Truco: En un polinomio de grado n, la derivada de orden n es constante y la siguiente vale 0.

4. Respuesta C · La aceleración es 6 m/s²

1. La velocidad es la primera derivada
   $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 2$
2. La aceleración es la derivada de la velocidad
   $a(t) = v'(t) = s''(t)$
   $a(t) = 6t - 12$
3. Evalúa en t = 3
   $a(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6$

Ojo: −7 es la velocidad en t = 3, no la aceleración; 18 olvida el −12 al derivar −12t.

Truco: Posición → velocidad → aceleración: una derivada por cada flecha.

5. Respuesta A · Cóncava hacia arriba si x > 2

1. Deriva dos veces
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
   $f''(x) = 6x - 12$
2. Encuentra dónde f″ = 0
   $6x - 12 = 0$
   $x = 2$
3. Elige el lado donde f″ es positiva
   $6x - 12 > 0 \iff x > 2$

Ojo: x < 2 invierte la desigualdad; x < 1 o x > 3 es donde f crece (f′ > 0), no la concavidad.

Truco: f″ > 0: cóncava hacia arriba (taza). f″ < 0: hacia abajo (sonrisa invertida).

6. Respuesta B · f‴(x) = 27e^{3x}

1. Primera derivada: sale un 3
   $f'(x) = 3e^{3x}$
2. Segunda derivada: otro 3
   $f''(x) = 9e^{3x}$
3. Tercera derivada: otro 3 más
   $f'''(x) = 27e^{3x}$

Ojo: 9e^{3x} es la segunda derivada; e^{3x} olvida el factor 3 que aparece en cada derivada.

Truco: Cada derivada de e^{kx} multiplica por k: la n-ésima es k^n e^{kx}.

7. Respuesta C · f″(x) = −4 sen 2x

1. Primera derivada
   $f'(x) = 2\cos 2x$
2. Segunda derivada
   $f''(x) = -4\,\text{sen}\,2x$
3. Compara con f
   $f''(x) = -4f(x)$

Ojo: −2 sen 2x aplica la cadena una sola vez; 4 sen 2x pierde el signo menos de la derivada del coseno.

Truco: Cada derivada de sen(kx) o cos(kx) saca un k; la segunda saca k^2.

8. Respuesta B · f″(x) = (x + 2)eˣ

1. Primera derivada con la regla del producto
   $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$
   $f'(x) = (x+1)e^x$
2. Segunda derivada: producto otra vez
   $f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)e^x$
3. Suma los términos semejantes
   $f''(x) = (x+2)e^x$

Ojo: (x + 1)eˣ es solo la primera derivada; xeˣ usa u″v + uv″ y olvida el término cruzado 2u′v′.

Truco: Cuando derives dos veces un producto, aplica la regla del producto en cada derivada.

9. Respuesta A · $f^{(7)}(x) = -\cos x$

1. Deriva hasta que el ciclo se repita
   $f' = \cos x,\ f'' = -\operatorname{sen} x$
   $f''' = -\cos x,\ f^{(4)} = \operatorname{sen} x$
2. El ciclo se repite cada 4 derivadas
   $f^{(5)} = f'$
   $f^{(6)} = f''$
   $f^{(7)} = f'''$
3. Reduce el orden: 7 = 4 + 3
   $f^{(7)}(x) = f'''(x) = -\cos x$

Ojo: cos x sale de contar el 7 como 1 dentro del ciclo; −sen x, de contarlo como 2.
Truco: Para sen y cos el ciclo es de 4: divide el orden entre 4 y mira el residuo.

10. Respuesta A · a = 0 en t = 1 s y t = 3 s

1. Deriva para obtener la velocidad
   $v(t) = s'(t)$
   $v(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t$
2. Deriva otra vez para obtener la aceleración
   $a(t) = s''(t)$
   $a(t) = 12t^2 - 48t + 36$
3. Resuelve a(t) = 0 factorizando
   $12(t^2 - 4t + 3) = 0$
   $12(t - 1)(t - 3) = 0$

Ojo: t = 0 y t = 3 es donde la velocidad vale cero, no la aceleración; t = 2 es donde a es mínima.
Truco: Para la aceleración cero, iguala a 0 la segunda derivada, no la primera.