Derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas

derivar seno, coseno, tangente, exponenciales y logaritmos, solos o combinados con las reglas básicas.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

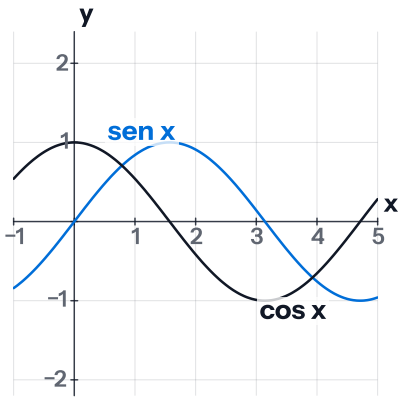
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Deriva la función.

$$y = 3\,\text{sen}\,x + 2\cos x$$

A) 3 cos x − 2 sen x **B)** 3 cos x + 2 sen x **C)** −3 cos x − 2 sen x



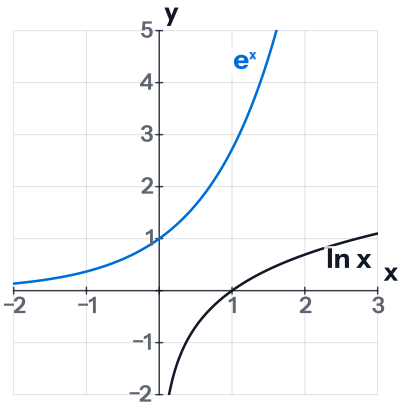
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Deriva la función (x > 0).

$$y = 4e^{x} - 3\ln x$$

A) 4eˣ − 3x **B)** 4eˣ − 3/x **C)** 4x·e^(x−1) − 3/x



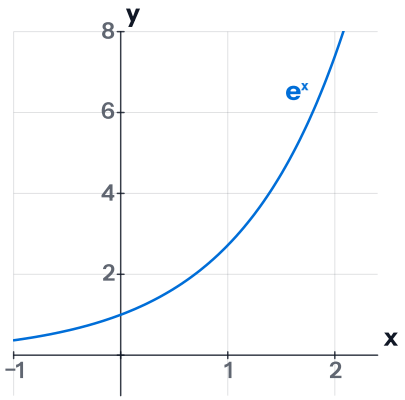
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en x = ln 3?

$$f(x) = e^x$$

A) $\ln 3$ **B)** $\frac{1}{3}$ **C)** 3



Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Deriva el producto con la regla (uv)′ = u′v + uv′.

$$y = x^2 e^x$$

función derivada

A) $2xe^x$ **B)** $e^x(x^2 + 2x)$ **C)** $x^2e^x + 2x$

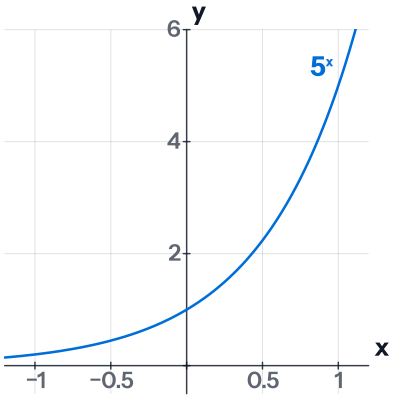
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Deriva la función exponencial.

$$y = 5^x$$

A) $5^x \ln 5$ **B)** 5^x **C)** $x \cdot 5^{x-1}$



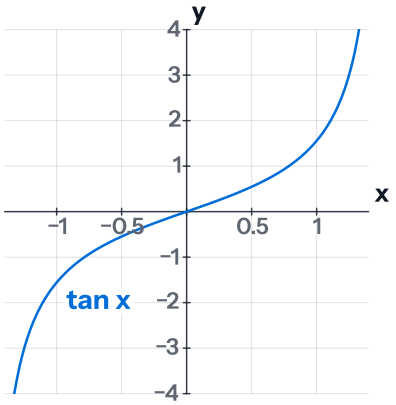
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la derivada de la tangente? Deduce con la regla del cociente.

$$y = \tan x$$

A) 1/cos² x **B)** 1/sen² x **C)** −1/cos² x



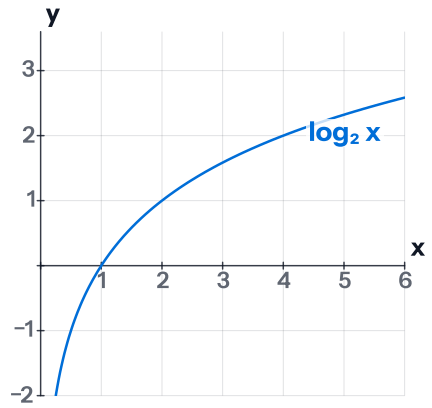
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Deriva la función logarítmica de base 2 (x > 0).

$$y = \log_2 x$$

A) $\frac{1}{x}$ **B)** $\frac{\ln 2}{x}$ **C)** $\frac{1}{x \ln 2}$



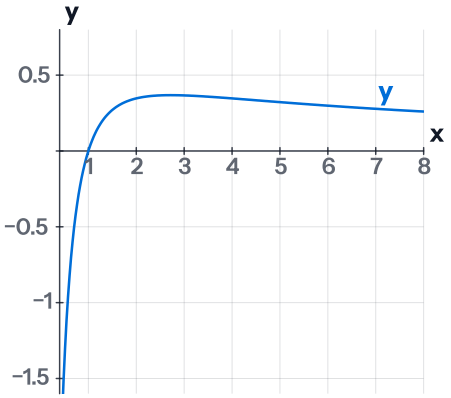
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Deriva con la regla del cociente (x > 0).

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

A) (ln x − 1)/x² **B)** (1 − ln x)/x² **C)** 1/x²



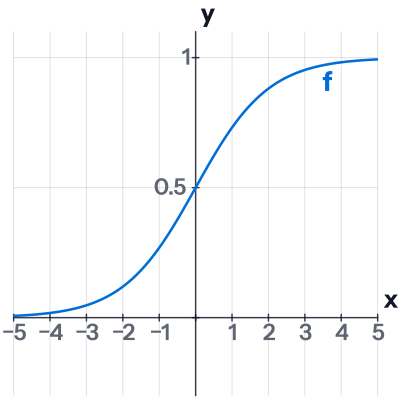
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Deriva con la regla del cociente y simplifica el numerador.

$$y = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

A) $e^x/(1+e^x)^2$ **B)** $-e^x/(1+e^x)^2$ **C)** $e^x/(1+e^x)$



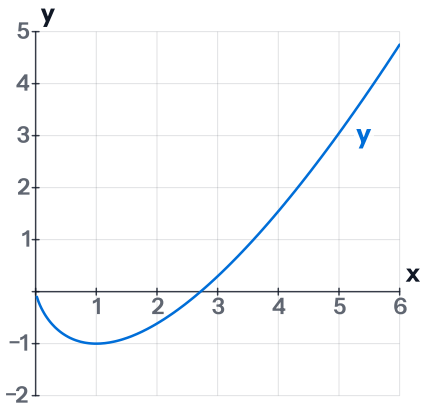
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Deriva la función, con x positivo.

$$y = x \ln x - x$$

A) $\ln x + 1$ **B)** $1/x - 1$ **C)** $\ln x$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · La derivada es 3 cos x − 2 sen x

1. La derivada del seno es el coseno
   $(3\operatorname{sen} x)' = 3\cos x$
2. La derivada del coseno es menos el seno
   $(2\cos x)' = -2\operatorname{sen} x$
3. Suma las derivadas
   $y' = 3\cos x - 2\operatorname{sen} x$

Ojo: 3 cos x + 2 sen x pierde el signo del coseno; −3 cos x − 2 sen x lo pone también al seno.
Truco: Solo la derivada del coseno lleva signo menos.

2. Respuesta B · La derivada es 4eˣ − 3/x

1. La exponencial se deriva a sí misma
   $(4e^x)' = 4e^x$
2. El logaritmo natural se deriva a 1/x
   $(-3\ln x)' = -\dfrac{3}{x}$
3. Suma las derivadas
   $y' = 4e^x - \dfrac{3}{x}$

Ojo: 4eˣ − 3x confunde la derivada de ln x con x; 4x·e^(x−1) aplica la regla de la potencia a una exponencial.
Truco: eˣ se deriva a sí misma; ln x se deriva a 1/x.

3. Respuesta C · La pendiente es 3

1. Calcula la altura del punto
   $f(\ln 3) = e^{\ln 3} = 3$
2. La exponencial se deriva a sí misma
   $f'(x) = e^x$
   $f'(\ln 3) = 3$
3. La tangente sube 3 por cada 1
   $m = 3$

Ojo: ln 3 es el valor de x, no la pendiente; 1/3 sería la derivada de ln x, no la de eˣ.
Truco: En eˣ, la pendiente de la tangente siempre es igual a la altura.

4. Respuesta B · La derivada es eˣ(x² + 2x)

1. Identifica los dos factores
   $u = x^2$
   $v = e^x$
2. Deriva cada factor
   $u' = 2x$
   $v' = e^x$
3. Aplica u′v + uv′
   $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
4. Saca factor común eˣ
   $y' = e^x(x^2 + 2x)$

Ojo: 2xeˣ multiplica u′ por v′; x²eˣ + 2x deja el 2x sin su factor eˣ.
Truco: Al derivar eˣ no cambia: puedes sacarla como factor común.

5. Respuesta A · La derivada es 5ˣ ln 5

1. Escribe 5ˣ con base e
   $5^x = e^{x\ln 5}$
2. Deriva eᵘ y multiplica por la derivada del exponente
   $u = x\ln 5$
   $y' = e^u \cdot u' = e^u \ln 5$
3. Regresa a 5ˣ
   $y' = 5^x \ln 5$

Ojo: 5ˣ la trata como si fuera eˣ; x·5^(x−1) usa la regla de la potencia, que no sirve con exponente variable.
Truco: Derivada de aˣ: aˣ por ln a.

6. Respuesta A · La derivada es 1/cos² x

1. La tangente es un cociente
   $\tan x = \operatorname{sen} x \div \cos x$
2. Calcula u′v − uv′
   $u = \operatorname{sen} x,\ v = \cos x$
   $u'v - uv' = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
3. Usa sen² + cos² = 1 y divide entre v²
   $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$
   $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Ojo: 1/sen² x intercambia seno y coseno; −1/cos² x arrastra el signo menos de la derivada del coseno.
Truco: Derivada de tan x: 1/cos² x, que también se escribe sec² x.

7. Respuesta C · La derivada es 1/(x ln 2)

1. Cambia a logaritmo natural
$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$
2. ln 2 es una constante: solo se deriva ln x
$$y' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x}$$
3. Junta las fracciones
$$y' = \frac{1}{x \ln 2}$$

Ojo: 1/x ignora la base del logaritmo; (ln 2)/x multiplica por ln 2 en vez de dividir.

Truco: Derivada de $\log_a x$: 1 entre x ln a.

8. Respuesta B · La derivada es (1 − ln x)/x²

1. Identifica u y v con sus derivadas
$$u = \ln x, \quad u' = 1 \div x$$
$$v = x, \quad v' = 1$$
2. Calcula u′v − uv′
$$u'v - uv' = (1 \div x)(x) - \ln x$$
$$= 1 - \ln x$$
3. Divide entre v²
$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$
4. Comprueba: tangente horizontal si el numerador es 0
$$1 - \ln x = 0$$
$$x = e$$

Ojo: (ln x − 1)/x² resta uv′ − u′v, al revés; 1/x² olvida el término uv′, que vale ln x.

Truco: Con ln en el numerador, u′v = (1/x)·x = 1.

9. Respuesta A · La derivada es $e^x/(1 + e^x)^2$

1. Identifica u y v con sus derivadas
$$u = e^x, \quad u' = e^x$$
$$v = 1 + e^x, \quad v' = e^x$$
2. Calcula u′v − uv′
$$e^x(1 + e^x) - e^x \cdot e^x$$
$$= e^x$$
3. Divide entre v²
$$y' = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$
4. Comprueba la pendiente en x = 0
$$y'(0) = 1 \div 2^2 = 1 \div 4$$

Ojo: $-e^x/(1 + e^x)^2$ resta uv′ − u′v, al revés; $e^x/(1 + e^x)$ olvida elevar el denominador al cuadrado.

Truco: Si u′ = v′, el numerador u′v − uv′ se simplifica mucho.

10. Respuesta C · La derivada es ln x

1. Deriva x ln x con la regla del producto
$$(x \ln x)' = \ln x + x \cdot (1 \div x)$$
$$= \ln x + 1$$
2. Deriva −x
$$(-x)' = -1$$
3. Suma las derivadas
$$y' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$
4. Comprueba: en x = 1 la tangente es horizontal
$$y'(1) = \ln 1 = 0$$

Ojo: ln x + 1 olvida derivar −x; 1/x − 1 deriva x ln x como u′v′, sin la regla del producto.

Truco: Al sumar las derivadas revisa cada término: un uno y un menos uno pueden cancelarse.