Derivación implícita

derivar ecuaciones implícitas, hallar dy/dx y la pendiente de la tangente en un punto.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

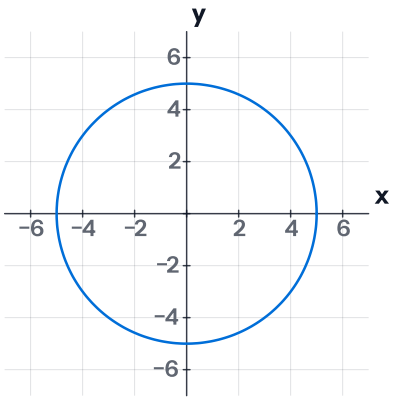
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Deriva implícitamente la ecuación de la circunferencia y halla dy/dx.

$$x^2 + y^2 = 25$$

A) $-\frac{x}{y}$ **B)** $\frac{x}{y}$ **C)** $-\frac{y}{x}$



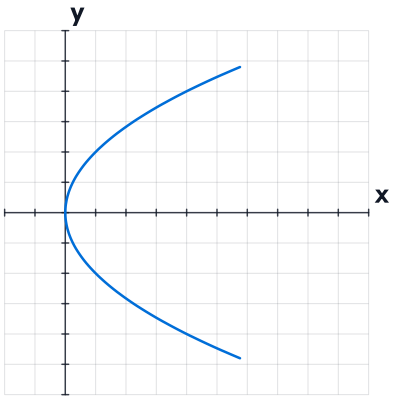
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

La parábola está dada por una ecuación implícita. Halla dy/dx.

$$y^2 = 4x$$

A) $\frac{4}{y}$ **B)** $\frac{2}{y}$ **C)** $\frac{y}{2}$

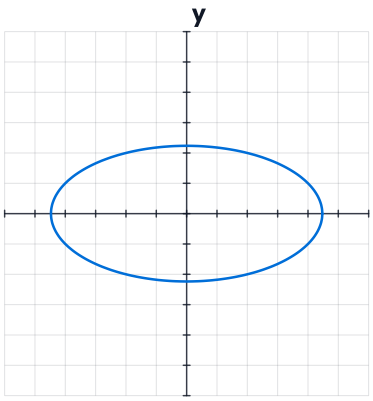


Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la elipse en el punto (2, 2)?

$$x^2 + 4y^2 = 20$$



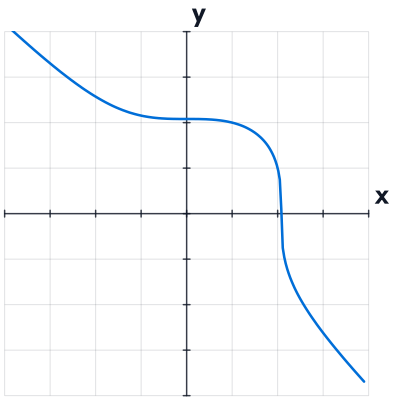
A) -1 **B)** $-\frac{1}{4}$ **C)** $\frac{1}{4}$

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (2, 1)?

$$x^3 + y^3 = 9$$



A) $-\frac{1}{4}$ **B)** 4 **C)** -4

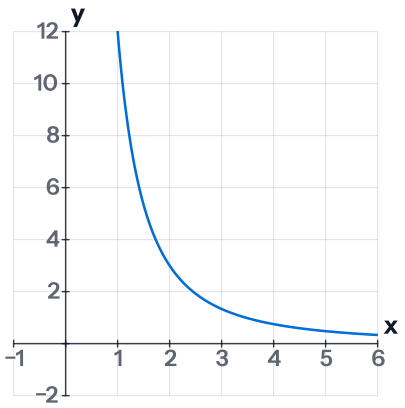
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Halla dy/dx. Cuidado: x² y y están multiplicadas.

$$x^2y = 12$$

A) $-\frac{2y}{x}$ **B)** $-\frac{x}{2y}$ **C)** $-\frac{y}{x}$



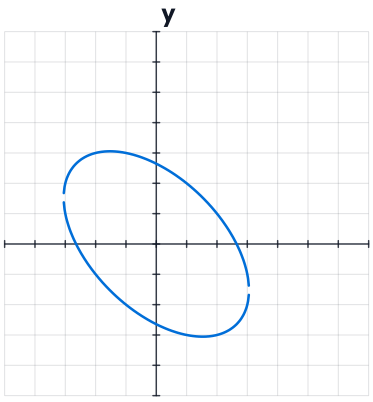
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la pendiente de la tangente a la curva en el punto (1, 2)?

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$

A) -1 **B)** $-\frac{2}{5}$ **C)** $-\frac{4}{5}$



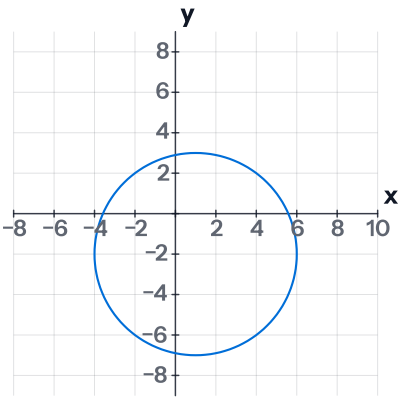
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto (4, 2)?

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25$$

A) y = −3x/2 + 8 **B)** y = −3x/4 + 5 **C)** y = 3x/4 − 1



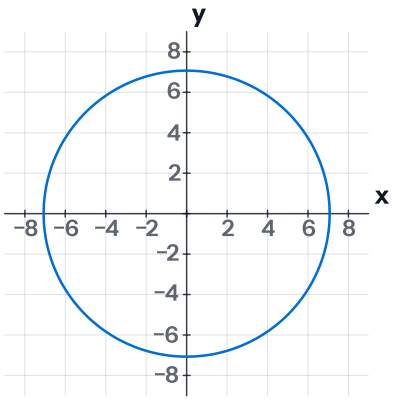
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

¿En qué punto de la circunferencia, en el primer cuadrante, la tangente tiene pendiente −1?

$$x^2+y^2=50$$

A) $(5,5)$ **B)** $(5,-5)$ **C)** $(1,7)$



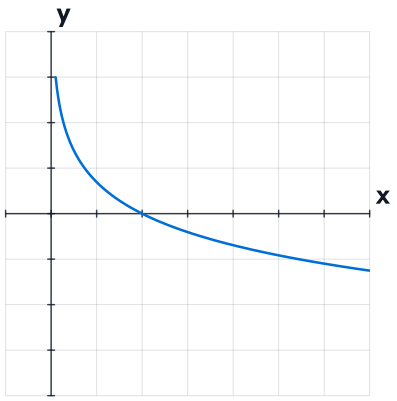
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto (2, 0)?

$$x\,e^{y} = 2$$

A) $\frac{1}{2}$ **B)** -2 **C)** $-\frac{1}{2}$



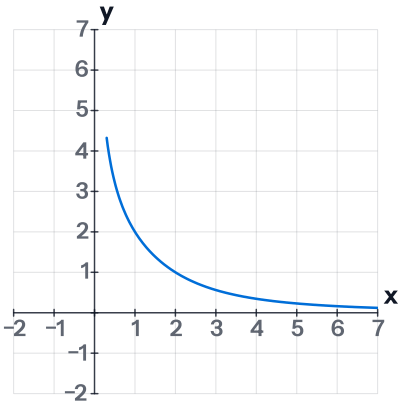
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (1, 2)?

$$x^{2}y + xy^{2} = 6$$

A) $-\frac{8}{5}$ **B)** -8 **C)** $-\frac{5}{8}$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · dy/dx es −x/y

1. Deriva cada término respecto a x; la y es función de x
   $$2x + 2y \cdot y' = 0$$
2. Despeja y′
   $$2y \cdot y' = -2x$$
   $$y' = -\frac{x}{y}$$
3. Comprueba en el punto (3, 4)
   $$y' = -\frac{3}{4}$$

Ojo: x/y pierde el signo al pasar 2x al otro lado; −y/x invierte el cociente.
Truco: Cada vez que derives una y, escribe su y′.

2. Respuesta B · dy/dx es 2/y

1. Deriva ambos lados respecto a x
   $$2y \cdot y' = 4$$
2. Despeja y′: depende solo de la altura y
   $$y' = 4 \div 2y$$
   $$y' = \frac{2}{y}$$
3. Ejemplo: en (4, 4) la pendiente es 2 entre 4
   $$y' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ojo: 4/y olvida el 2 de 2y·y′ al despejar; y/2 pone el cociente al revés.
Truco: Derivar y^2 da 2y·y′, nunca solo 2y.

3. Respuesta B · La pendiente es −1/4

1. Deriva cada término; en $4y^2$ usa la cadena
   $$2x + 8y \cdot y' = 0$$
2. Despeja y′
   $$8y \cdot y' = -2x$$
   $$y' = -\frac{x}{4y}$$
3. Sustituye x = 2 y y = 2
   $$y' = -2 \div 8$$
   $$y' = -\frac{1}{4}$$

Ojo: −1 olvida el 4 de $4y^2$ al derivar y da −x/y; 1/4 pierde el signo.
Truco: Un coeficiente que multiplica a y^2 se queda al derivar.

4. Respuesta C · La pendiente es −4

1. Deriva: cada cubo baja el 3 y la y lleva y′
   $$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = 0$$
2. Despeja y′
   $$3y^2 \cdot y' = -3x^2$$
   $$y' = -\frac{x^2}{y^2}$$
3. Sustituye x = 2 y y = 1
   $$y' = -\frac{4}{1} = -4$$

Ojo: −1/4 invierte el cociente x^2/y^2; 4 pierde el signo menos al despejar.
Truco: Al despejar y′, comprueba el signo antes de sustituir.

5. Respuesta A · dy/dx es −2y/x

1. Usa la regla del producto en $x^2 \cdot y$
   $$2x \cdot y + x^2 \cdot y' = 0$$
2. Despeja y′
   $$x^2 \cdot y' = -2xy$$
   $$y' = -\frac{2y}{x}$$
3. Prueba en (2, 3)
   $$y' = -\frac{2 \cdot 3}{2} = -3$$

Ojo: −x/(2y) pone el cociente al revés; −y/x olvida que x^2 se deriva como 2x.
Truco: Si hay producto de x y y, usa la regla del producto y no olvides y′.

6. Respuesta C · La pendiente es −4/5

1. Deriva cada término; xy lleva regla del producto
   $$2x + (y + x \cdot y') + 2y \cdot y' = 0$$
2. Agrupa los términos con y′ y despeja
   $$(x + 2y) \cdot y' = -2x - y$$
   $$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$
3. Sustituye x = 1 y y = 2
   $$y' = -(2 + 2) \div (1 + 4)$$
   $$y' = -\frac{4}{5}$$

Ojo: −1 olvida el término x·y′; −2/5 olvida el término y del producto xy.
Truco: En xy aparecen dos términos: y y x·y′.

7. Respuesta B · La tangente es y = −3x/4 + 5

1. Deriva ambos lados respecto a x
$$2(x-1)+2(y+2)y'=0$$
2. Despeja y′
$$y'=-\frac{x-1}{y+2}$$
3. Sustituye x = 4 y y = 2
$$y'=-\frac{3}{4}$$
4. Usa punto-pendiente y despeja y
$$y-2=-0.75(x-4)$$
$$y=-\frac{3}{4}x+5$$

Ojo: −3x/2 + 8 olvida el +2 de y + 2 al despejar; 3x/4 − 1 pierde el signo de la pendiente.
Truco: Después de y′, la tangente es punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

8. Respuesta A · El punto es (5, 5)

1. Obtén y′ por derivación implícita
$$2x+2y\cdot y'=0$$
$$y'=-\frac{x}{y}$$
2. Pide pendiente −1: queda x = y
$$-x\div y=-1$$
$$x=y$$
3. Sustituye en la circunferencia
$$x^2+x^2=50$$
$$x^2=25\Rightarrow x=5$$
4. Comprueba la pendiente en (5, 5)
$$y'=-5\div 5=-1$$

Ojo: (5, −5) cumple $x^2 + y^2 = 50$, pero su pendiente es +1; (1, 7) está en la circunferencia con pendiente −1/7.
Truco: Primero obtén y′; después iguálala a la pendiente que te piden.

9. Respuesta C · La pendiente es −1/2

1. Regla del producto; la derivada de e^y es e^y · y′
$$e^y+x\,e^y\cdot y'=0$$
2. Despeja y′: e^y se cancela
$$x\,e^y\cdot y'=-e^y$$
$$y'=-\frac{1}{x}$$
3. Sustituye x = 2
$$y'=-\frac{1}{2}$$

Ojo: 1/2 pierde el signo menos; −2 invierte el cociente: usa −x en vez de −1/x.
Truco: La derivada de e^y respecto a x es e^y · y′.

10. Respuesta A · La pendiente es −8/5

1. Regla del producto en cada término
$$2xy+x^2y'$$
$$+y^2+2xy\,y'=0$$
2. Agrupa los términos con y′
$$(x^2+2xy)y'$$
$$=-(2xy+y^2)$$
3. Despeja y′
$$y'=-\frac{2xy+y^2}{x^2+2xy}$$
4. Sustituye x = 1 y y = 2
$$y'=-(4+4)\div(1+4)$$
$$y'=-\frac{8}{5}$$

Ojo: −8 olvida el término 2xy·y′ del segundo producto; −5/8 invierte el cociente.
Truco: Con dos productos aparecen cuatro términos; revisa que no falte ninguno.