Demostración, prueba y conclusiones

contraejemplos, casos y pasos justificados.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál de estos números es un contraejemplo de la afirmación «todo número primo es impar»?

A) 9 **B)** 2 **C)** 4

Número	¿Es primo?	¿Es impar?

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Afirmación: «la suma de dos números primos es siempre un número primo». ¿Con cuál de estos pares se demuestra que es falsa?

A) 2 y 3 **B)** 2 y 5 **C)** 3 y 5

Par	Suma	¿Suma prima?

Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Se comprobó que $n^2 + n + 41$ es primo para n = 0, 1, 2, 3 y 4. ¿Qué se puede concluir sobre la afirmación «es primo para todo entero $n \geq 0$»?

n	0	1	2	3	4
$n^2 + n + 41$	41	43	47	53	61
¿Primo?	sí	sí	sí	sí	sí

A) Sí: se cumple en 5 casos, así que es verdadera para todo n

B) Queda refutada: 5 casos son muy pocos para afirmarla

C) No: 5 casos no la prueban; un caso que falle sí la refuta

Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Para refutar «si un número es múltiplo de 3, entonces es múltiplo de 6», ¿qué número sirve como contraejemplo?

Número	Múltiplo de 3	Múltiplo de 6

A) 9 **B)** 12 **C)** 8

Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Se afirma que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ para cualesquiera números. ¿Con qué valores se demuestra que es falso?

A) $a = 1,\ b = 2$ **B)** $a = 0,\ b = 4$ **C)** $a = 5,\ b = 0$

Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

En la demostración de que la suma de dos pares es par, ¿qué justifica el paso 2m + 2n = 2(m + n)?

Afirmación	Razón

A) La propiedad conmutativa de la suma

B) La definición de número par aplicada a m y n

C) La propiedad distributiva (factor común)

Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Se quiere probar por casos que n(n + 1) es par para todo entero n. En el caso n impar, ¿qué razonamiento sirve?

Caso	n	n + 1	n(n + 1)

A) n + 1 es par, y un factor par hace par al producto

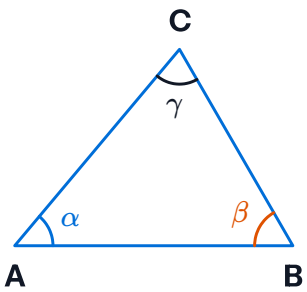
B) n es impar, así que el producto también es impar

C) n + 1 es impar, así que el producto resulta par

Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Para probar que los ángulos de un triángulo suman 180°, se traza por C una paralela a AB. ¿Qué justifica que el ángulo entre esa paralela y CA, a la izquierda de C, sea igual al ángulo en A?



A) Los ángulos opuestos por el vértice son siempre iguales

B) Los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales

C) Los tres ángulos de un triángulo suman 180°

Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

En la «demostración» de la figura, con a = b y a distinto de 0, se llega a 2 = 1. ¿En qué paso está el error?

Paso	Afirmación	Razón
1	$a = b$	supuesto
2	$a^2 = ab$	multiplicar por a
3	$(a+b)(a-b) = b(a-b)$	restar b^2 y factorizar
4	$a + b = b$	dividir entre a − b
5	$2 = 1$	con a = b y dividir

A) Al dividir entre a − b, que vale 0

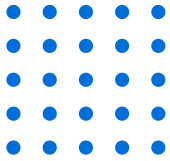
B) Al factorizar y restar en el paso 3

C) Al multiplicar por a en el paso 2

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

En la figura, el cuadrado de lado n = 5 crece al de lado 6. ¿Qué afirmación, válida para cualquier entero n, demuestra este argumento?



A) $(n+1)^2 - n^2 = 2n$, siempre par

B) $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, siempre impar

C) $(n+1)^2 - n^2 = n + 1$, de paridad variable

Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta B · El contraejemplo es 2

1. Un contraejemplo debe cumplir la condición (ser primo) y romper la conclusión (ser impar)
2. Descarta los que no son primos: 9 y 4
3. El 2 es primo y es par: rompe la afirmación

Ojo: 9 es impar pero no es primo, así que no prueba nada; 4 no cumple la condición de ser primo.
Truco: Un contraejemplo cumple la hipótesis y falla la conclusión.

2. Respuesta C · El par 3 y 5

1. Suma cada par de primos
   $3 + 5 = 8$
   $2 + 3 = 5, \quad 2 + 5 = 7$
2. Revisa si cada suma es prima
3. Con 3 y 5 la suma no es prima: contraejemplo

Ojo: Los pares 2 y 3, y 2 y 5, sí dan suma prima: son ejemplos que la cumplen, no contraejemplos.
Truco: Un ejemplo que cumple la regla no la prueba; uno que falla sí la refuta.

3. Respuesta C · Cinco casos no la prueban

1. Los cinco valores comprobados dan primos: 41, 43, 47, 53 y 61
2. Ver que se cumple en algunos casos no demuestra que se cumpla en todos
3. Un solo caso que falle la refuta: con n = 40 sale 41^2
   $40^2 + 40 + 41 = 1681$
   $1681 = 41 \times 41$

Ojo: Probar pocos casos que cumplen no demuestra nada, pero tampoco refuta: refutar exige un caso que falle.
Truco: Para probar hace falta un argumento general; para refutar basta un contraejemplo.

4. Respuesta A · El contraejemplo es 9

1. Un contraejemplo debe ser múltiplo de 3 (cumple la hipótesis)
2. Y no debe ser múltiplo de 6 (falla la conclusión)
3. 9 es múltiplo de 3 pero no de 6

Ojo: 12 cumple las dos condiciones; 8 ni siquiera cumple la hipótesis, así que tampoco refuta nada.
Truco: Para refutar «si P entonces Q», busca un caso con P verdadera y Q falsa.

5. Respuesta A · a = 1 y b = 2

1. Con a = 1 y b = 2, calcula el lado derecho: $a^2 + b^2$
   $1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$
2. Ahora el lado izquierdo, $(a + b)^2$: sale un cuadrado de lado 3
   $(1 + 2)^2 = 9$
3. Como $9 \neq 5$, esos valores son un contraejemplo
   $9 \neq 5$

Ojo: Con a = 0 o b = 0 la igualdad sí se cumple, porque desaparece el término 2ab; por eso no sirven.
Truco: Elige valores sencillos, pero que ninguno sea cero, para que se note el término 2ab.

6. Respuesta C · La propiedad distributiva

1. Se escribe cada número par como el doble de un entero y se suman
   $a = 2m, \quad b = 2n$
   $a + b = 2m + 2n$
2. En el paso pedido se saca el 2 como factor común: es la propiedad distributiva
   $2m + 2n = 2(m + n)$
3. Como m + n es entero, 2(m + n) es el doble de un entero: es par

Ojo: La conmutativa solo cambia el orden de los sumandos; la definición de par se usa al inicio y al final.
Truco: En una demostración, cada renglón necesita una razón: definición, propiedad o dato.

7. Respuesta A · n + 1 es par

1. Todo entero es par o impar: dos casos cubren todo
2. Caso n par: el factor n ya es par, así que el producto es par
3. Caso n impar: n + 1 es par, y el producto vuelve a ser par

Ojo: Un producto es par si basta un factor par; n impar implica n + 1 par, no impar.
Truco: En una prueba por casos, revisa todos los casos posibles sin dejar ninguno fuera.

8. Respuesta B · Alternos internos entre paralelas

1. Traza por C la paralela al lado AB
2. La paralela y el lado AC forman con AB ángulos alternos internos: α y β se copian en C
   $\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta$
3. En C, los tres ángulos forman un ángulo llano
   $\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$

Ojo: Los opuestos por el vértice no aparecen aquí; usar «suman 180°» sería razonamiento circular, pues es lo que se prueba.
Truco: No uses en la prueba el resultado que quieres demostrar.

9. Respuesta A · El error está en el paso 4

1. Los pasos 2 y 3 son operaciones válidas: multiplicar, restar y factorizar
2. En el paso 4 se divide entre a − b, y como a = b, esa resta vale 0
   $a - b = 0$
3. Dividir entre 0 no está permitido: lo que sigue no vale

Ojo: Factorizar y multiplicar por a son pasos legítimos; el problema es dividir entre una expresión que vale cero.
Truco: Antes de dividir entre una expresión, comprueba que no valga cero.

10. Respuesta B · Siempre es 2n + 1, impar

1. Pasar del cuadrado de lado 5 al de lado 6 agrega una fila y una columna
   $6^2 - 5^2$
2. Se agregan 5 puntos en la columna, 5 en la fila y 1 en la esquina
   $5 + 5 + 1 = 11$
3. Con lado n: n + n + 1 = 2n + 1, que es par más 1, es decir, impar
   $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Ojo: 2n olvida el punto de la esquina; n + 1 cuenta solo una fila, no la fila y la columna.
Truco: Una figura con n general vale como prueba si el conteo no depende del valor de n.