Continuidad de una función

continuidad en un punto y en un intervalo, tres condiciones y clasificación de discontinuidades.

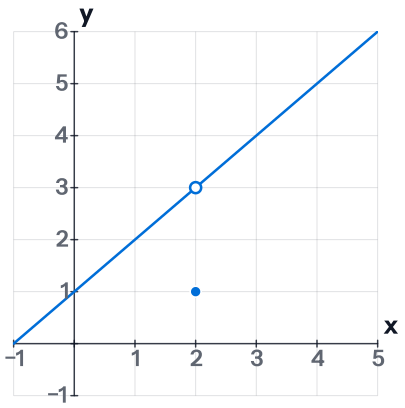
- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Una función es continua en a si f(a) existe, el límite en a existe y ambos son iguales. En la gráfica, el punto lleno es f(2). ¿Por qué f no es continua en x = 2?



A) El límite en x = 2 no existe **B)** f(2) no está definida

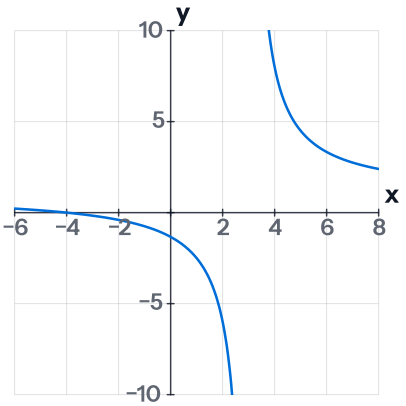
C) El límite es 3, pero f(2) = 1

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Una fracción no está definida donde su denominador vale 0. ¿En qué valor de x no es continua f?

$$f(x) = \frac{x+4}{x-3}$$



A) $x = 3$ **B)** $x = -4$ **C)** $x = -3$

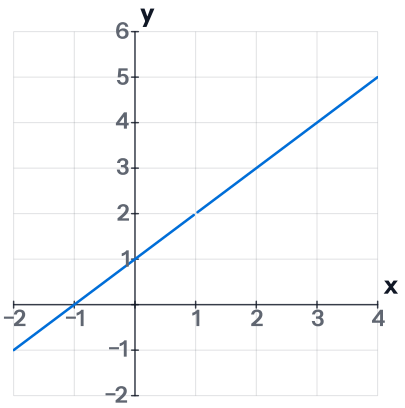
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Para x ≠ 1 la función es el cociente indicado, y en x = 1 vale k. ¿Qué valor de k hace continua a f en x = 1?

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$
$$f(1) = k$$

A) 2 **B)** 0 **C)** 1



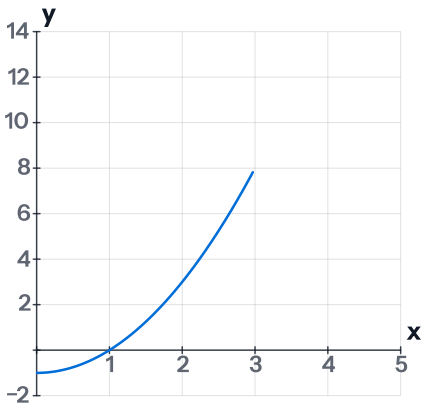
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Continua en a significa que f(a) existe, el límite existe y son iguales. ¿Qué valor de k hace continua a f en x = 3?

$$f(x) = x^2 - 1 \quad (x < 3)$$
$$f(x) = 2x + k \quad (x \geq 3)$$

A) 8 **B)** 14 **C)** 2



Tu procedimiento

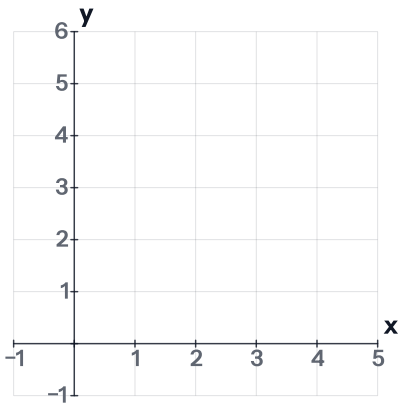
5 NIVEL MEDIO

Evitable: el límite existe. De salto: los límites laterales son finitos y distintos. Infinita: los valores crecen sin cota. ¿Qué discontinuidad tiene f en x = 2?

$$f(x) = 3 - x \quad (x < 2)$$
$$f(x) = x + 1 \quad (x \geq 2)$$

A) Evitable (el límite existe) **B)** Infinita (hay asíntota)

C) De salto (laterales distintos)



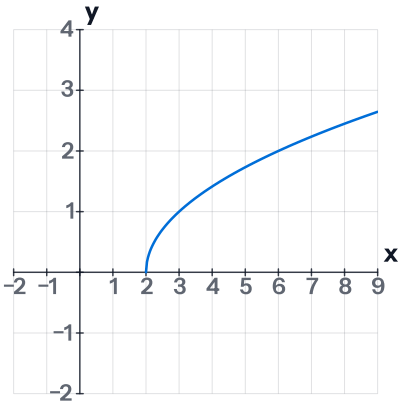
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

En un extremo cerrado basta la continuidad lateral (por la derecha, en el extremo izquierdo). ¿Cuál es el mayor intervalo en el que f es continua?

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$

A) $[2, \infty)$ **B)** $(-\infty, \infty)$ **C)** $(2, \infty)$



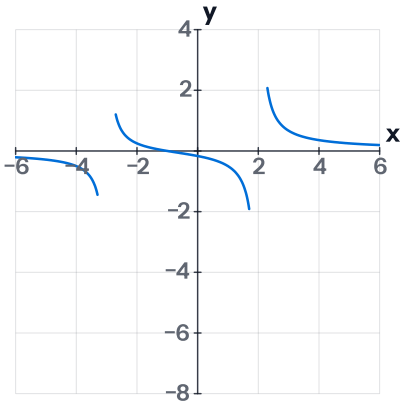
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Una función racional es continua en un intervalo cerrado si el intervalo no contiene ningún cero del denominador. ¿En cuál intervalo es continua f?

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$$

A) $[0, 3]$ **B)** $[-2, 1]$ **C)** $[-4, -1]$



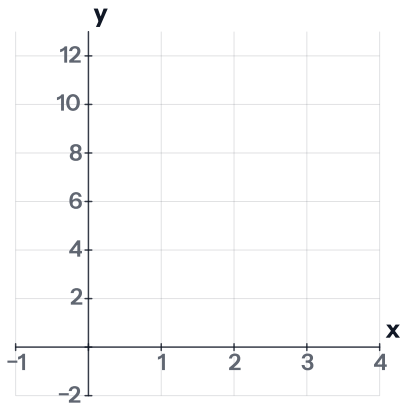
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Continua en 2 significa f(2) existe, el límite existe y son iguales. ¿Qué valor de k hace continua a f en x = 2?

$$f(x) = kx + 1 \quad (x \leq 2)$$
$$f(x) = x^2 - k \quad (x > 2)$$

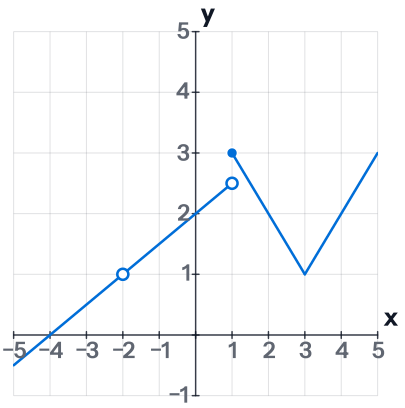
A) 3 **B)** 1 **C)** $\frac{5}{3}$



Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

La gráfica de f está formada por trozos rectos. ¿En cuántos puntos del intervalo [−5, 5] es discontinua f?



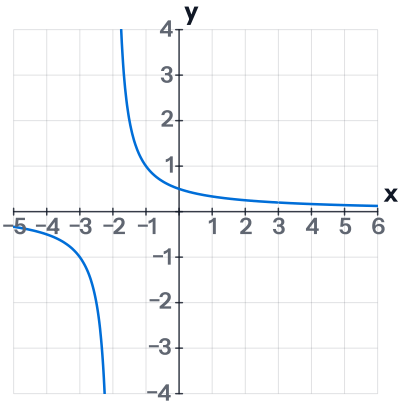
A) En dos puntos **B)** En tres puntos **C)** En un punto

Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

El denominador de f se anula en x = 3 y en x = −2. Evitable: el límite existe. Infinita: los valores crecen sin cota. ¿Cómo se clasifica cada discontinuidad?

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}$$



A) x = 3 infinita y x = −2 evitable **B)** x = 3 evitable y x = −2 infinita

C) Las dos son infinitas

Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta C · No es continua: falla la condición 3, el límite y f(2) difieren

1. Condición 1: ¿existe f(2)? Sí, es el punto lleno
   $f(2) = 1$
2. Condición 2: ¿existe el límite? Sí, la curva llega al hueco
   $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$
3. Condición 3: ¿el límite es igual a f(2)? No: 3 ≠ 1
   $3 \neq 1$

Ojo: «f(2) no existe» y «el límite no existe» fallan las condiciones 1 y 2, pero ambas se cumplen aquí; falla la tercera.
Truco: Revisa las tres condiciones en orden: valor, límite e igualdad.

2. Respuesta A · No es continua en x = 3

1. Busca dónde el denominador vale 0
   $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
2. El numerador en 0 no es problema
   $f(-4) = \frac{0}{-7} = 0$
3. En x = 3 no hay valor: la función es discontinua
   $x = 3$

Ojo: x = −4 anula el numerador, no el denominador; x = −3 sale de resolver mal x − 3 = 0.
Truco: Una racional es discontinua donde el denominador se anula.

3. Respuesta A · k = 2

1. Simplifica para x ≠ 1
   $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$
2. Calcula el límite en x = 1
   $\lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$
3. Continuidad: f(1) debe ser igual al límite
   $f(1) = k = 2$

Ojo: El 0 sale de leer 0/0 como 0; el 1 usa el valor de x en vez de la altura del hueco.
Truco: Para tapar un hueco, define f(a) igual al límite.

4. Respuesta C · k = 2

1. Calcula el límite por la izquierda de 3, con la primera regla
   $\lim_{x \to 3}(x^2 - 1) = 8$
2. Calcula f(3) con la segunda regla
   $f(3) = 2(3) + k = 6 + k$
3. Iguala f(3) con el límite y despeja k
   $6 + k = 8$
   $k = 2$

Ojo: El 8 iguala k con el límite sin contar el 6 de 2x; el 14 pasa el 6 sumando al otro lado.
Truco: Plantea: valor de la regla de la derecha en a = límite por la izquierda.

5. Respuesta C · Es una discontinuidad de salto

1. Límite por la izquierda (x < 2), con la primera regla
   $\lim_{x \to 2}(3 - x) = 1$
2. Límite por la derecha (x > 2), con la segunda regla
   $\lim_{x \to 2}(x + 1) = 3$
3. Son finitos pero distintos: hay un salto
   $1 \neq 3$

Ojo: Evitable exige que el límite exista, y aquí los laterales difieren; infinita exige valores sin cota, y aquí son finitos.
Truco: Compara los dos laterales: iguales, evitable; distintos y finitos, salto.

6. Respuesta A · Es continua en [2, ∞)

1. La raíz solo existe si lo de adentro es no negativo
   $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$
2. En x = 2: el límite por la derecha es igual a f(2)
   $\lim_{x \to 2} \sqrt{x - 2} = 0 = f(2)$
3. Dentro del dominio es continua, y el extremo 2 se incluye
   $[2, \infty)$

Ojo: (−∞, ∞) ignora el dominio de la raíz; (2, ∞) deja fuera el extremo 2, aunque ahí hay continuidad lateral.
Truco: Dominio primero; en extremos cerrados basta continuidad lateral.

7. Respuesta B · Es continua en [−2, 1]

1. Halla los ceros del denominador
   $(x-2)(x+3)=0$
   $x=2 \text{ o } x=-3$
2. Descarta los intervalos que contienen 2 o −3
   $2 \in [0,3]$
   $-3 \in [-4,-1]$
3. El intervalo [−2, 1] no contiene a ninguno
   $-3<-2 \text{ y } 1<2$

Ojo: [0, 3] contiene a 2 y [−4, −1] contiene a −3; en ambos hay una asíntota que rompe la continuidad.
Truco: Marca los ceros del denominador y revisa que ninguno caiga dentro del intervalo.

8. Respuesta B · k = 1

1. Por la izquierda (incluye x = 2): f(2) = 2k + 1
   $f(2)=k(2)+1=2k+1$
2. Por la derecha: el límite es 4 − k
   $\lim_{x\to 2}(x^2-k)=4-k$
3. Iguala y despeja k
   $2k+1=4-k$
   $k=1$

Ojo: El 3 pasa −k al otro lado sin cambiar su signo; el 5/3 suma el 1 en vez de restarlo.
Truco: Plantea: valor de la izquierda = límite de la derecha, y resuelve la ecuación en k.

9. Respuesta A · Es discontinua en dos puntos: x = −2 y x = 1

1. En x = −2 hay un hueco: f(−2) no existe
   $x=-2$
2. En x = 1 hay un salto: los laterales son 2.5 y 3
   $2.5 \neq 3$
3. En x = 3 hay un pico, pero las ramas se unen
   $4-3=3-2=1$

Ojo: «Tres» cuenta el pico de x = 3, que no es discontinuidad; «uno» ignora el hueco de x = −2.
Truco: Un pico no rompe la continuidad: si las ramas se tocan, es continua.

10. Respuesta B · x = 3 es evitable y x = −2 es infinita

1. Factoriza el denominador
   $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$
   $f(x)=\dfrac{x-3}{(x-3)(x+2)}$
2. En x = 3 se cancela el factor: el límite existe
   $\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{5}$
3. En x = −2 el denominador tiende a 0 y el numerador no
   $x-3=-5\neq 0$

Ojo: Decir «las dos infinitas» ignora que (x − 3) se cancela; la opción invertida confunde hueco con asíntota.
Truco: Si el factor del denominador se cancela, es hueco; si no, es asíntota.