Concepto de límite

límite con tablas y gráficas, límites laterales, límites infinitos y la idea de épsilon y delta.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Evalúa f en valores cada vez más cercanos a 2, por la izquierda y por la derecha. ¿Cuánto vale el límite bilateral de f cuando x tiende a 2?

x	f(x)

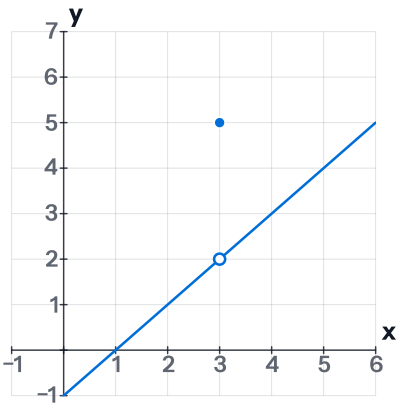
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

A) 4 **B)** No existe, porque f(2) no está definida **C)** 0

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

La gráfica de f es una recta con un hueco; el punto lleno aislado es el valor de f en x = 3. ¿Cuánto vale el límite bilateral de f cuando x tiende a 3?



$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

A) 5 **B)** No existe **C)** 2

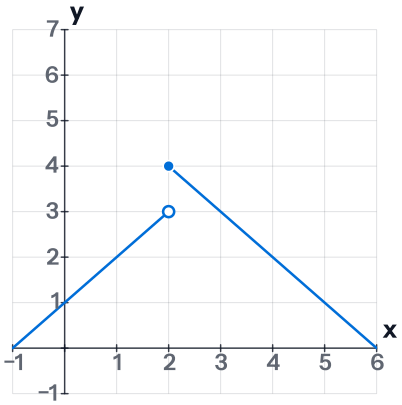
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

La gráfica de f tiene un salto en x = 2. ¿Cuánto vale el límite lateral de f cuando x tiende a 2 por la izquierda (x < 2)?

$$x \to 2^{-} : \lim f(x)$$

A) 4 **B)** 3 **C)** 2



Tu procedimiento

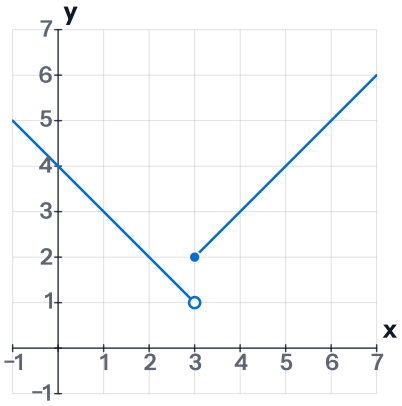
4 NIVEL MEDIO

¿Existe el límite bilateral de f cuando x tiende a 3? Elige la afirmación correcta.

$$f(x) = 4 - x \quad (x < 3)$$
$$f(x) = x - 1 \quad (x \geq 3)$$

A) Existe y vale 2, porque f(3) = 2 **B)** No existe: los laterales son 1 y 2

C) Existe y vale 1, el de la izquierda

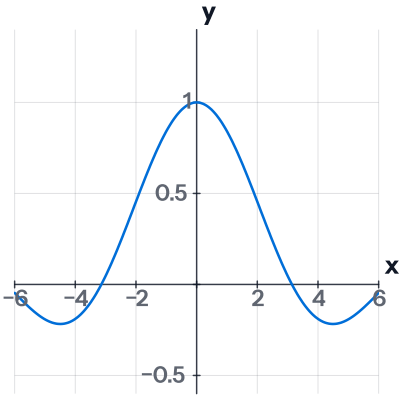


Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

La función no está definida en x = 0. Usa la gráfica y valores cercanos (x en radianes). ¿Cuánto vale el límite de f cuando x tiende a 0?

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$



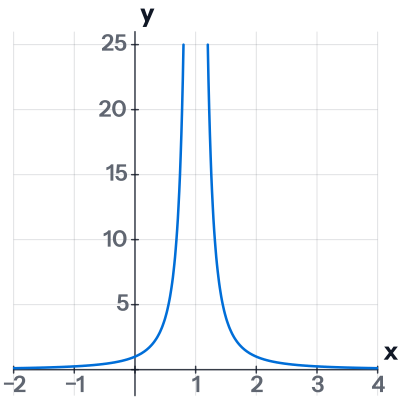
A) 1 **B)** 0 **C)** No existe

Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Decimos que el límite es +∞ cuando los valores de f crecen sin cota. ¿Qué pasa con f(x) cuando x se acerca a 1 por ambos lados?

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$



A) Se acerca a 0 (límite 0) **B)** Se acerca a 1 (límite 1)

C) Crece sin cota (límite +∞)

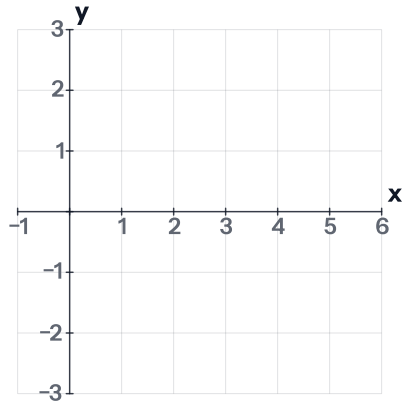
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

¿Cuánto vale el límite de f cuando x tiende a 2 por la izquierda (x < 2)?

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$$

A) 1 **B)** 0 **C)** -1



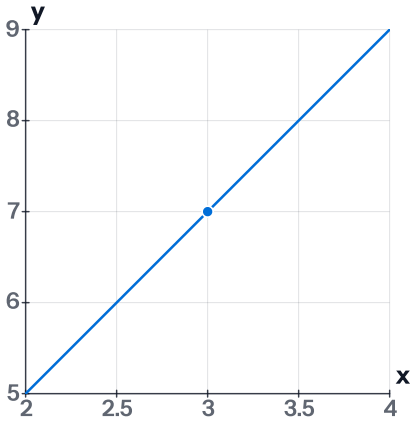
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Se sabe que el límite de 2x + 1 cuando x tiende a 3 es 7. Para que f(x) quede a menos de 0.5 de 7, ¿cuál es el mayor **δ** que lo garantiza con |x − 3| < **δ**?

$$f(x) = 2x + 1$$
$$|f(x) - 7| < 0.5$$

A) $\delta = 0.5$ **B)** $\delta = 0.25$ **C)** $\delta = 1$



Tu procedimiento

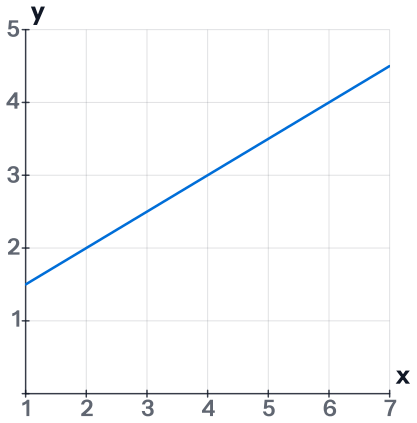
9 NIVEL DIFÍCIL

En la definición formal del límite, dado ε > 0 se busca δ > 0 tal que |x − a| < δ implica |f(x) − L| < ε. Aquí a = 4, L = 3. ¿Qué mide δ?

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

A) La distancia entre x y a (horizontal)

B) La distancia entre f(x) y L (vertical) **C)** La distancia entre a y L



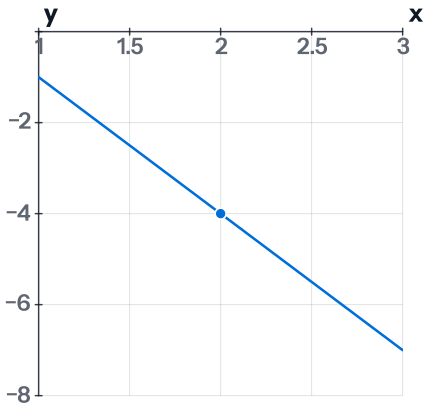
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Para f(x) = −3x + 2 se sabe que el límite cuando x tiende a 2 es −4. Si queremos |f(x) + 4| < 0.6, ¿cuál es el mayor δ tal que |x − 2| < δ lo garantiza?

$$f(x) = -3x + 2$$
$$|f(x) + 4| < 0.6$$

A) $\delta = 0.2$ **B)** $\delta = 1.8$ **C)** $\delta = 0.6$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El límite vale 4

1. Acércate a 2 por la izquierda
   $f(1.9) = 3.9$
   $f(1.999) = 3.999$
2. Acércate a 2 por la derecha
   $f(2.1) = 4.1$
   $f(2.001) = 4.001$
3. Los valores de ambos lados se acercan al mismo número
   $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$
4. f(2) no existe, pero el límite no necesita f(2)
   $f(2) = \frac{0}{0}$

Ojo: «No existe» confunde límite con valor: f(2) no existe, pero los vecinos se acercan a 4. El 0 sale de leer 0/0 como 0.
Truco: El límite describe a dónde se acerca f, no lo que vale en el punto.

2. Respuesta C · El límite vale 2

1. Recorre la curva desde la izquierda hacia x = 3
   $x \to 3^- : \ f(x) \to 2$
2. Haz lo mismo desde la derecha
   $x \to 3^+ : \ f(x) \to 2$
3. Ambos lados coinciden; el punto aislado no cuenta
   $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$
   $f(3) = 5$

Ojo: El 5 es f(3), el valor en el punto, no el límite. «No existe» cree que un hueco impide el límite.
Truco: Mira a dónde llega la curva, no el punto aislado.

3. Respuesta B · El límite por la izquierda vale 3

1. Recorre la rama izquierda hacia x = 2
   $x \to 2^-$
2. Lee la altura a la que se acerca la curva
   $f(x) \to 3$
3. La rama derecha y el punto lleno no intervienen
   $x \to 2^- : \ \lim f(x) = 3$

Ojo: El 4 es f(2) y el límite por la derecha; el 2 es el valor de x, no una altura.
Truco: Límite lateral: solo cuenta el lado que dice el signo de x → a.

4. Respuesta B · El límite bilateral no existe

1. Por la izquierda (x < 3) usa la primera regla
   $\lim_{x \to 3}(4 - x) = 1$
2. Por la derecha (x > 3) usa la segunda regla
   $\lim_{x \to 3}(x - 1) = 2$
3. Compara: los lados no coinciden
   $1 \neq 2$

Ojo: Elegir 2 mira solo f(3); elegir 1 mira solo la izquierda. El bilateral exige que ambos lados coincidan.
Truco: Bilateral existe si y solo si los dos laterales existen y son iguales.

5. Respuesta A · El límite vale 1

1. Prueba con valores de x algo lejos de 0
   $f(1.5) \approx 0.665$
2. Acércate más a 0
   $f(0.5) \approx 0.959$
   $f(0.1) \approx 0.998$
3. Más cerca todavía, el valor casi es 1
   $f(0.01) \approx 0.99998$
4. El límite es 1, aunque f(0) no exista
   $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Ojo: El 0 sale de sustituir sen 0 en el numerador, olvidando que el denominador también es 0. «No existe» confunde límite con valor.
Truco: Cuando sustituir da 0/0, no concluyas: explora valores cercanos o la gráfica.

6. Respuesta C · Los valores crecen sin cota hacia +∞

1. Calcula valores a distancia 0.5 de x = 1
   $f(0.5) = 4$
   $f(1.5) = 4$
2. Acércate más: la función se dispara
   $f(0.8) = 25$
   $f(0.9) = 100$
3. Cerca de x = 1 los valores crecen sin parar
   $f(0.99) = 10000$
4. No se acercan a ningún número: crecen sin cota
   $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

Ojo: El 0 sale de leer 1/0 como 0 o confundir x→1 con x→∞; el 1 toma el valor de x como límite de f.
Truco: Si el denominador tiende a 0 y el numerador no, f crece sin cota.

7. Respuesta C · El límite por la izquierda vale −1

1. Por la izquierda, x es menor que 2
   $x < 2 \Rightarrow x - 2 < 0$
2. El valor absoluto de un negativo es su opuesto
   $|x - 2| = -(x - 2)$
3. Simplifica: queda la constante −1
   $f(x) = \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1$

Ojo: El 1 es el límite por la derecha, donde x − 2 es positivo; el 0 sale de tratar |0|/0 como 0.
Truco: Con valor absoluto, separa por el signo de lo de adentro.

8. Respuesta B · δ = 0.25

1. Escribe la condición sobre f y simplifica
   $|2x + 1 - 7| < 0.5$
   $|2x - 6| < 0.5$
2. Saca el factor 2 del valor absoluto
   $2\,|x - 3| < 0.5$
3. Divide entre 2: así se obtiene δ
   $|x - 3| < 0.25$

Ojo: δ = 0.5 copia ε sin ver que la pendiente es 2; δ = 1 multiplica por 2 en lugar de dividir.
Truco: Con pendiente m, δ = ε / |m|.

9. Respuesta A · δ mide |x − a|, en el eje horizontal

1. Ubica a en el eje horizontal y L en el vertical
   $a = 4,\ L = 3$
2. ε es la tolerancia en la altura
   $|f(x) - L| < \varepsilon$
3. δ es la distancia permitida en horizontal
   $|x - a| < \delta$

Ojo: Confundir δ con ε: ε es la tolerancia en y, δ la cercanía en x. La distancia entre a y L no mide nada.
Truco: ε va con y (la altura); δ va con x (la posición).

10. Respuesta A · δ = 0.2

1. Escribe la condición y simplifica
   $|(-3x + 2) + 4| < 0.6$
   $|-3x + 6| < 0.6$
2. Factoriza: el valor absoluto ignora el signo del −3
   $3\,|x - 2| < 0.6$
3. Divide entre 3
   $|x - 2| < 0.2$

Ojo: δ = 1.8 multiplica 0.6 por 3 en vez de dividir; δ = 0.6 copia ε ignorando la pendiente.
Truco: δ = ε dividido entre el valor absoluto de la pendiente.