Cálculo de límites algebraicos

límites de polinomios y funciones racionales por sustitución, factorización y racionalización.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

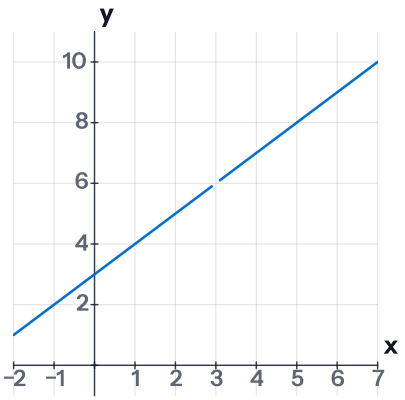
Nombre _____ Fecha _____

EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

Al sustituir x = 3 queda 0 arriba y 0 abajo. ¿Qué indica sobre el límite bilateral cuando x tiende a 3?

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$



A) Es indeterminado: se simplifica antes

B) Vale 0, porque el numerador es 0

C) No existe, porque el denominador es 0

Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

Calcula el límite bilateral. El denominador no tiende a 0, así que basta sustituir.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 3x}{x + 3}$$

Parte	Con x = −2

A) -2 **B)** 10 **C)** -10

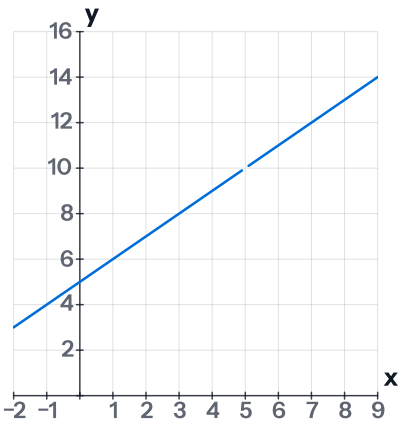
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Calcula el límite bilateral. Al sustituir queda 0/0: factoriza el numerador.

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

A) 0 **B)** 5 **C)** 10



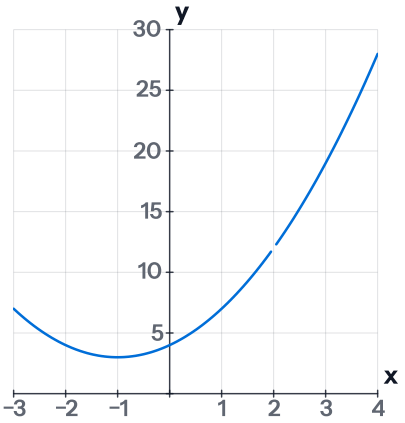
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Calcula el límite bilateral. Recuerda que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

A) 12 **B)** 0 **C)** 8



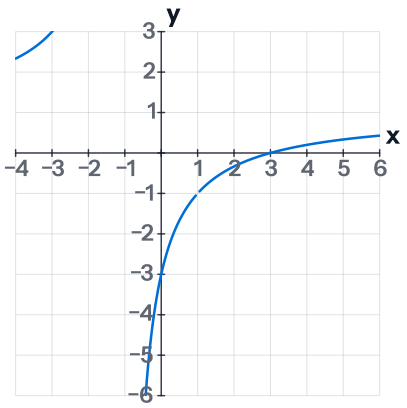
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Calcula el límite bilateral. Al sustituir queda 0/0 y tanto el numerador como el denominador se pueden factorizar.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$$

A) 1 **B)** 0 **C)** -1



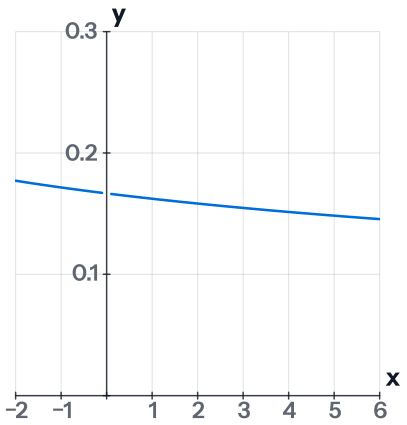
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

Calcula el límite bilateral. Al sustituir queda 0/0: multiplica arriba y abajo por el conjugado del numerador.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$$

A) 1/3 **B)** 0 **C)** 1/6



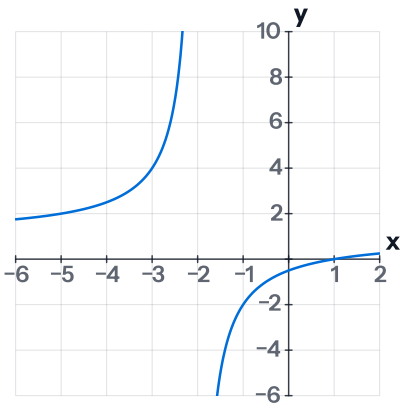
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

Calcula el límite bilateral. Al sustituir queda 0/0; factoriza ambos trinomios y cuida los signos al sustituir x = −3.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$$

A) 4 **B)** 0 **C)** -4



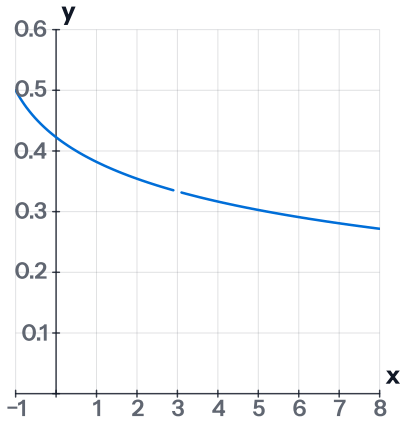
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

Calcula el límite bilateral. Racionaliza el numerador y fíjate en el factor que sale al simplificar.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x - 3}$$

A) 1/6 **B)** 1/3 **C)** 0



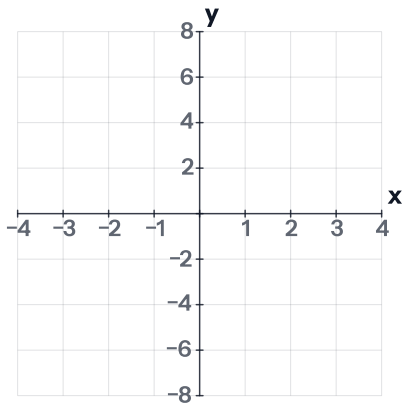
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Si el numerador no vale 0 en x = 2, el denominador sí tiende a 0 y el límite bilateral no es un número. ¿Para qué valor de k el límite es finito?

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + kx - 6}{x - 2}$$

A) $k = 1$ **B)** $k = -1$ **C)** $k = 3$



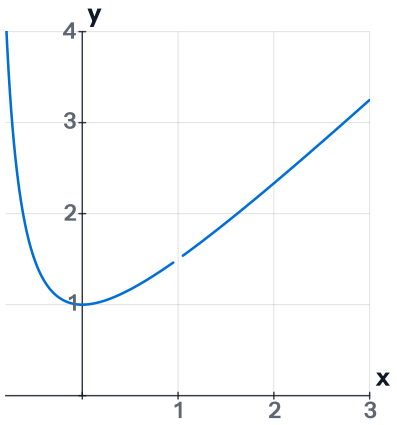
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Calcula el límite bilateral. Factoriza una diferencia de cubos arriba y una de cuadrados abajo.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

A) 3 **B)** 3/2 **C)** 0



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · 0/0 es indeterminado: se simplifica y el límite vale 6

1. Sustituye x = 3 en el numerador y en el denominador
   $3^2 - 9 = 0$
   $3 - 3 = 0$
2. Cero entre cero no es un número: no te dice nada del límite
   $\frac{0}{0}$
3. Factoriza y cancela: sí hay límite
   $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$
   $f(x) = x + 3 \quad (x \neq 3)$

Ojo: Decir 0 lee 0/0 como 0; decir que no existe lo trata como k/0 con k distinto de 0, que sí daría asíntota.

Truco: Si al sustituir queda 0/0, factoriza y cancela antes de concluir.

2. Respuesta B · El límite vale 10

1. Sustituye x = −2 en el numerador, con paréntesis
   $(-2)^2 - 3(-2)$
   $= 4 + 6 = 10$
2. Sustituye en el denominador y comprueba que no vale 0
   $-2 + 3 = 1$
3. Divide: como no hay 0/0, ese es el límite
   $\frac{10}{1} = 10$

Ojo: El −2 hace −3(−2) = −6, con el signo mal; el −10 toma $(-2)^2$ como −4, sin el paréntesis.

Truco: Al sustituir un negativo, ponlo entre paréntesis: $(-2)^2 = 4$.

3. Respuesta C · El límite vale 10

1. Factoriza el numerador: es una diferencia de cuadrados
   $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$
2. Cancela el factor x − 5 (x es distinto de 5)
   $\frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = x + 5$
3. Sustituye x = 5 en la expresión simplificada
   $\lim_{x \to 5}(x + 5) = 10$

Ojo: El 5 deja solo la x tras cancelar mal, sin la suma x + 5; el 0 lee 0/0 como 0.

Truco: Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

4. Respuesta A · El límite vale 12

1. Factoriza el numerador como diferencia de cubos, con a = x y b = 2
   $x^3 - 8 = (x - 2) \cdot$
   $(x^2 + 2x + 4)$
2. Cancela el factor x − 2
   $\frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2}$
   $= x^2 + 2x + 4$
3. Sustituye x = 2 en lo que queda
   $2^2 + 2(2) + 4 = 12$

Ojo: El 8 factoriza como $(x - 2)(x^2 + 4)$, sin el término 2x; el 0 lee 0/0 como 0.

Truco: En la diferencia de cubos el trinomio lleva tres términos: a^2, ab y b^2.

5. Respuesta C · El límite vale −1

1. Factoriza el numerador y el denominador
   $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$
   $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
2. Cancela el factor común x − 1
   $\frac{x - 3}{x + 1}$
3. Sustituye x = 1 en la expresión simplificada
   $\frac{1 - 3}{1 + 1} = \frac{-2}{2} = -1$

Ojo: El 1 toma 1 − 3 como 2, perdiendo el signo; el 0 se queda con el 0/0 de la sustitución directa.

Truco: Factoriza arriba y abajo: el factor que hace 0/0 siempre aparece en los dos.

6. Respuesta C · El límite vale 1/6

1. Multiplica arriba y abajo por el conjugado del numerador
   conjugado:
   $\sqrt{x + 9} + 3$
2. Arriba queda x y se cancela con la x de abajo
   $(\sqrt{x + 9})^2 - 3^2 = x$
   $\frac{1}{\sqrt{x + 9} + 3}$
3. Sustituye x = 0
   $\frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$

Ojo: El 1/3 usa solo uno de los dos 3 del denominador; el 0 se queda con el 0/0 de la sustitución directa.

Truco: Raíz en el numerador y 0/0: multiplica por el conjugado.

7. Respuesta A · El límite vale 4

1. Factoriza los dos trinomios
   $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$
   $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$
2. Cancela x + 3; el factor x + 2 queda abajo
   $\frac{x - 1}{x + 2}$
3. Sustituye x = −3 con paréntesis
   $\frac{-3 - 1}{-3 + 2} = \frac{-4}{-1} = 4$

Ojo: El −4 toma −3 + 2 como 1 y no como −1; el 0 se queda con el 0/0 de la sustitución directa.
Truco: Entre el 0/0 y el valor final, vuelve a revisar el signo del denominador.

8. Respuesta B · El límite vale 1/3

1. Multiplica arriba y abajo por el conjugado
   $\text{conjugado: } \sqrt{2x + 3} + 3$
2. Desarrolla el numerador
   $(2x + 3) - 9 = 2x - 6$
   $= 2(x - 3)$
3. Cancela x − 3
   $\frac{2}{\sqrt{2x + 3} + 3}$
4. Sustituye x = 3
   $\frac{2}{3 + 3} = \frac{1}{3}$

Ojo: El 1/6 olvida que 2x − 6 = 2(x − 3) deja un 2 arriba; el 0 lee 0/0 como 0.
Truco: Al factorizar el numerador, conserva el coeficiente que sale: 2x − 6 = 2(x − 3).

9. Respuesta A · La constante k vale 1

1. Para un límite finito, el numerador debe valer 0 en x = 2
   $2^2 + 2k - 6 = 0$
2. Despeja k
   $2k - 2 = 0$
   $k = 1$
3. Comprueba: con k = 1 el factor x − 2 se cancela
   $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$
   $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$

Ojo: k = −1 pone −2k en vez de +2k; k = 3 plantea 2k − 6 = 0, sin el 4.
Truco: Límite finito con denominador → 0: el numerador debe anularse en ese punto.

10. Respuesta B · El límite vale 3/2

1. Factoriza el numerador y el denominador
   $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
   $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$
2. Cancela x − 1
   $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$
3. Sustituye x = 1: ahora el denominador no es 0
   $\frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$

Ojo: El 3 cancela bien, pero olvida dividir entre el x + 1 que queda abajo; el 0 se queda con el 0/0.
Truco: Después de cancelar, sustituye en TODO lo que queda, numerador y denominador.