Área bajo la curva y aplicaciones

calcular áreas bajo una curva y entre curvas, volúmenes de sólidos de revolución y distancias con integrales definidas.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

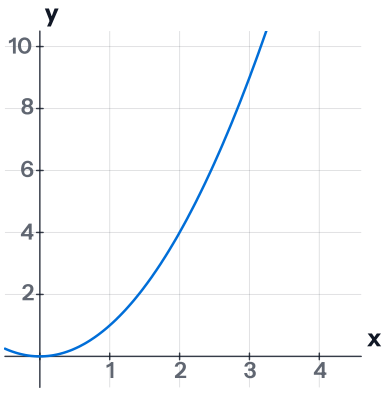
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es el área de la región limitada por la parábola, el eje x y las rectas x = 0 y x = 3?

$$y = x^2$$

A) 9 **B)** 27 **C)** 27/2



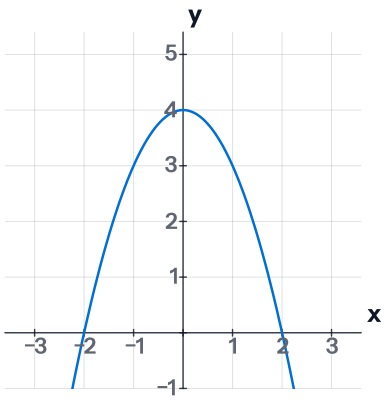
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

¿Cuál es el área de la región que queda entre la parábola y el eje x? La región está sobre el eje.

$$y = 4 - x^2$$

A) 16/3 **B)** 32/3 **C)** 16



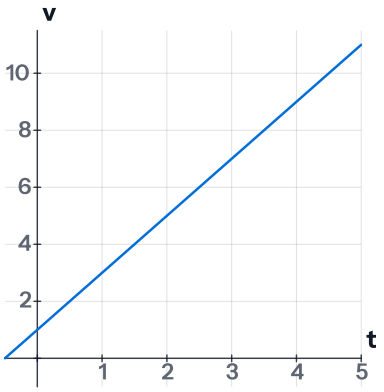
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

La velocidad de una partícula, en m/s, es v(t) = 2t + 1, siempre positiva. ¿Qué distancia recorre entre t = 0 y t = 4 segundos?

$$v(t) = 2t + 1$$

A) 9 m **B)** 16 m **C)** 20 m



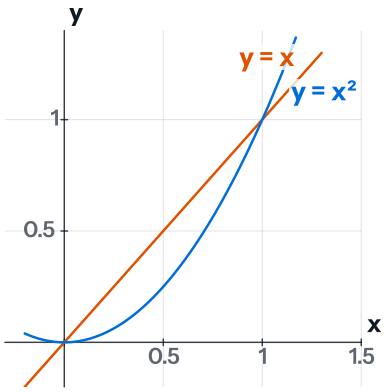
Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

Las curvas se cortan en x = 0 y en x = 1. ¿Cuál es el área de la región que encierran entre ellas?

$$y = x$$
$$y = x^2$$

A) 1/6 **B)** 1/2 **C)** 5/6



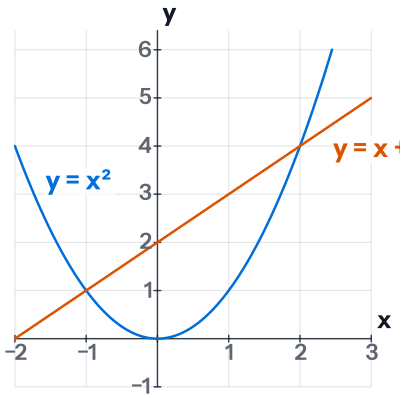
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

¿Cuál es el área de la región encerrada entre la recta y la parábola?

$$y = x + 2$$
$$y = x^2$$

A) 9/2 **B)** 10/3 **C)** 21/2



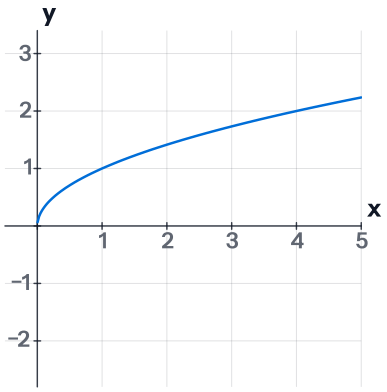
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

La región bajo la curva, entre x = 0 y x = 4, gira alrededor del eje x. ¿Cuál es el volumen del sólido que se forma?

$$y = \sqrt{x}$$

A) 8 **B)** 8π **C)** 16π/3



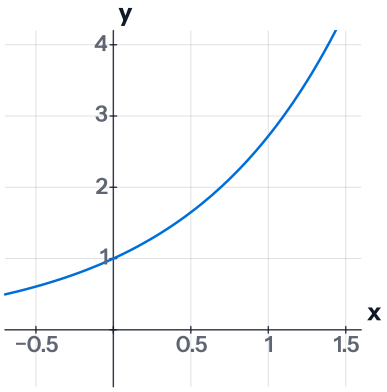
Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

¿Cuál es el área bajo la curva, entre x = 0 y x = ln 3? (ln 3 ≈ 1.1)

$$y = e^x$$

A) 3 **B)** $e^3 - 1$ **C)** 2



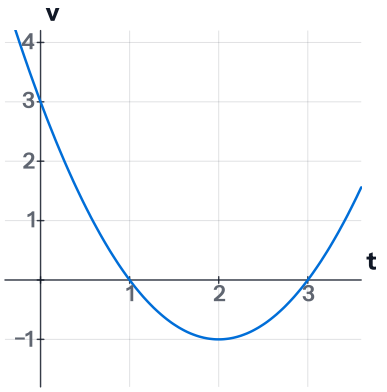
Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

La velocidad de una partícula, en m/s, es v(t) = t² − 4t + 3. ¿Qué distancia total recorre entre t = 0 y t = 3 segundos? (Pregunta por la distancia total, no por el desplazamiento.)

$$v(t) = t^2 - 4t + 3$$

A) 8/3 m **B)** 0 m **C)** 4/3 m



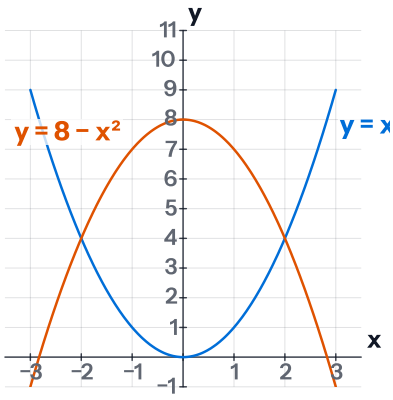
Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

¿Cuál es el área de la región encerrada entre las dos parábolas?

$$y = x^2$$
$$y = 8 - x^2$$

A) 80/3 **B)** 64/3 **C)** 32/3



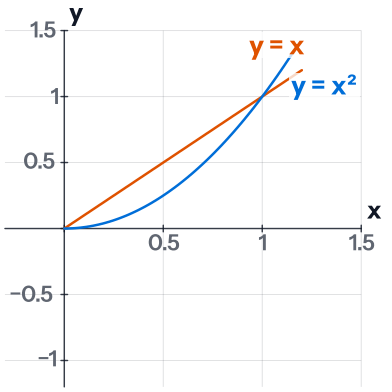
Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

La región entre las curvas, de x = 0 a x = 1, gira alrededor del eje x. ¿Cuál es el volumen del sólido?

$$y = x$$
$$y = x^2$$

A) π/30 **B)** π/6 **C)** 2π/15



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta A · El área es 9

1. El área bajo la curva es una integral definida
   $A = \int_0^3 x^2\,dx$
2. Busca una antiderivada de x²
   $F(x) = \frac{x^3}{3}$
3. Evalúa: F en el límite superior menos F en el inferior
   $F(3) - F(0) = 9 - 0$
4. Interpreta el resultado como área
   $A = 9$

Ojo: 27 olvida dividir entre 3 al integrar; 27/2 trata la región como un triángulo de base 3 y altura 9.
Truco: Área bajo la curva: integra y evalúa entre los límites.

2. Respuesta B · El área es 32/3

1. Los límites son los cruces con el eje x
   $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
2. Busca una antiderivada
   $F(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$
3. Evalúa F en los dos límites
   $F(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$
   $F(-2) = -\frac{16}{3}$
4. Resta: F(2) − F(−2)
   $F(2) - F(-2)$
   $= 16/3 + 16/3 = 32/3$

Ojo: 16/3 integra solo de 0 a 2, la mitad; 16 es el rectángulo de 4 por 4, que rodea a la región.
Truco: En una región simétrica, el área es el doble de la mitad: integra de −2 a 2 o duplica de 0 a 2.

3. Respuesta C · Recorre 20 metros

1. La distancia es el área bajo la gráfica de la velocidad
   $d = \int_0^4 (2t + 1)\,dt$
2. Busca una antiderivada
   $F(t) = t^2 + t$
3. Evalúa en t = 4 y en t = 0
   $F(4) - F(0) = 20 - 0$
4. Comprueba con el trapecio: bases 1 y 9, altura 4
   $\frac{1+9}{2} \cdot 4 = 20$

Ojo: 9 m es la velocidad final, no la distancia; 16 m integra solo 2t y omite el 1 de la velocidad.
Truco: Distancia = integral de la velocidad (si no cambia de signo).

4. Respuesta A · El área es 1/6

1. Entre 0 y 1 la recta va arriba: resta curva de arriba menos curva de abajo
   $A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$
2. Busca una antiderivada de x − x²
   $F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$
3. Evalúa F en 1 y en 0
   $F(0) = 0$
   $F(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
4. Resta y simplifica
   $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
   $= \frac{1}{6}$

Ojo: 1/2 es el área bajo la recta, sin restar la parábola; 5/6 suma las dos áreas, 1/2 + 1/3, en lugar de restarlas.
Truco: Entre dos curvas: integral de (arriba − abajo).

5. Respuesta A · El área es 9/2

1. Los límites son los puntos de corte: iguala las curvas
   $x^2 = x + 2$
   $x = -1,\ x = 2$
2. Entre −1 y 2 la recta va arriba: integra arriba menos abajo
   $\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)\,dx$
3. Busca la antiderivada
   $F(x) = x^2/2 + 2x - x^3/3$
4. Evalúa F en 2 y en −1 y resta
   $10/3 - (-7/6) = 9/2$

Ojo: 10/3 integra solo de 0 a 2, olvidando el corte en −1; 21/2 suma las curvas en vez de restar.
Truco: Primero los cortes, luego «arriba menos abajo».

6. Respuesta B · El volumen es 8π

1. Cada rebanada es un disco de radio √x y área π por el radio al cuadrado
   $A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$
2. El volumen suma los discos de x = 0 a x = 4
   $V = \pi \int_0^4 x\,dx$
3. Integra x
   $= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$
4. Evalúa
   $= \pi(8 - 0) = 8\pi$

Ojo: 8 olvida el factor π; 16π/3 integra el radio √x en vez de su cuadrado.
Truco: Discos: V = π ∫ (radio)² dx, con el radio elevado al cuadrado antes de integrar.

7. Respuesta C · El área es 2

1. El área es la integral de e^x entre 0 y ln 3
   $A = \int_0^{\ln 3} e^x \, dx$
2. La exponencial es su propia antiderivada
   $F(x) = e^x$
3. Evalúa: e^(ln 3) vale 3
   $F(\ln 3) = 3$
   $F(0) = 1$
4. Resta
   $3 - 1 = 2$

Ojo: 3 olvida restar F(0) = 1; $e^3 - 1$ evalúa en x = 3 en lugar de x = ln 3.
Truco: e^(ln a) = a: exponencial y logaritmo se cancelan.

8. Respuesta A · Recorre 8/3 metros

1. Ve dónde cambia el signo de v: ahí la partícula da la vuelta
   $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$
2. Busca una antiderivada de v
   $F(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$
3. Integra cada tramo por separado
   $F(1) - F(0) = 4/3$
   $F(3) - F(1) = -4/3$
4. La distancia suma los tamaños, sin signo
   $\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

Ojo: 0 m es el desplazamiento, 4/3 − 4/3, que se cancela; 4/3 m cuenta solo el tramo de ida.
Truco: Desplazamiento = ∫v; distancia = ∫|v|: parte donde v cambia de signo.

9. Respuesta B · El área es 64/3

1. Iguala las curvas para hallar los cortes
   $x^2 = 8 - x^2$
   $x = \pm 2$
2. Arriba va 8 − x²: integra arriba menos abajo
   $\int_{-2}^{2} (8 - 2x^2) \, dx$
3. Busca la antiderivada
   $F(x) = 8x - \frac{2x^3}{3}$
4. Evalúa en 2 y en −2 y resta
   $32/3 - (-32/3) = 64/3$

Ojo: 80/3 integra solo 8 − x², sin restar la parábola de abajo; 32/3 integra solo de 0 a 2.
Truco: Entre curvas, integra la diferencia (arriba − abajo), no cada una por separado.

10. Respuesta C · El volumen es 2π/15

1. Cada rebanada es una arandela: radio exterior x, radio interior x²
   $A(x) = \pi(x^2 - x^4)$
2. El volumen suma las arandelas de 0 a 1
   $V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx$
3. Integra cada potencia y evalúa
   $= \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$
4. Resta las fracciones
   $= \frac{2\pi}{15}$

Ojo: π/30 eleva al cuadrado la diferencia (x − x²)²; π/6 integra x − x² sin elevar los radios al cuadrado.
Truco: Arandelas: π ∫ (R² − r²) dx, no π ∫ (R − r)² dx.