Antiderivada y constante de integración

antiderivadas como familia de curvas, constante de integración y condiciones iniciales.

- **10 ejercicios**, de menos a más difícil, cada uno con 3 opciones.
- Resuélvelo a mano en el espacio de cada ejercicio; **después** compara con las claves del final.
- Si fallas uno, lee el paso a paso y repítelo en una hoja limpia.

Nombre _____ Fecha _____

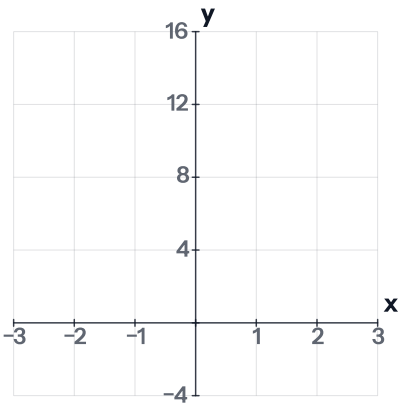
EJERCICIOS

1 NIVEL FÁCIL

¿Cuál de estas funciones es una antiderivada de f(x) = 2x? Una antiderivada es una función cuya derivada es f.

$$f(x) = 2x$$

A) $2x^2$ **B)** 2 **C)** $x^2 + 7$



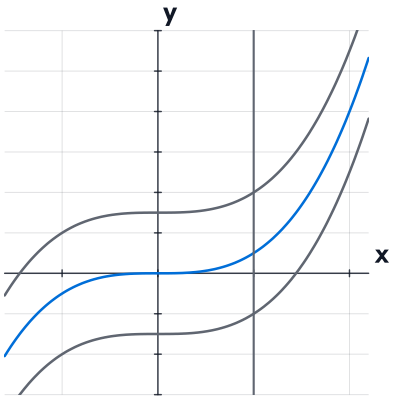
Tu procedimiento

2 NIVEL FÁCIL

La figura muestra las gráficas de $F(x) = x^3 + C$ para tres valores de C. ¿Cuál es la pendiente de la tangente en x = 1, sin importar el valor de C?

$$F(x) = x^3 + C$$

A) 3 **B)** 1 **C)** 3 + C



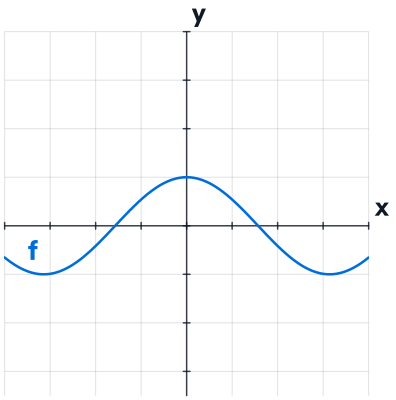
Tu procedimiento

3 NIVEL FÁCIL

Una antiderivada de f(x) = cos x es sen x. ¿Cuál expresión describe todas las antiderivadas de f?

$$f(x) = \cos x$$

A) sen x **B)** sen x + C **C)** −sen x + C

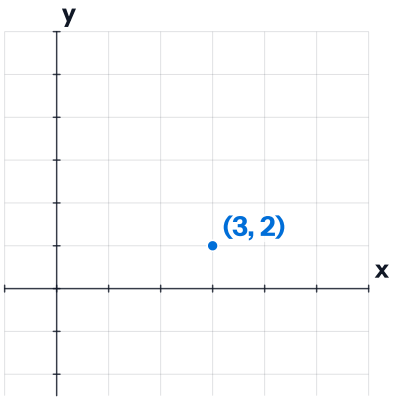


Tu procedimiento

4 NIVEL MEDIO

La pendiente de una curva en cada punto es 2x − 4, y la curva pasa por el punto (3, 2). ¿Cuál es su ecuación?

A) $y = x^2 - 4x + 2$ **B)** $y = x^2 - 4x + 5$ **C)** $y = x^2 - 4x - 1$



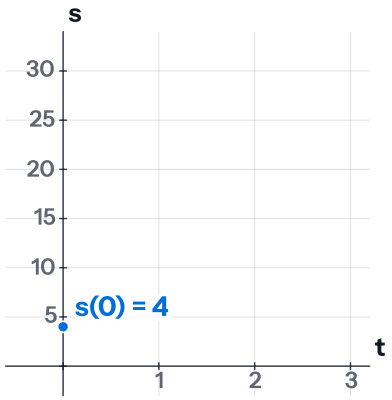
Tu procedimiento

5 NIVEL MEDIO

Un móvil tiene velocidad v(t) = 6t metros por segundo, con t en segundos. En t = 0 está a 4 m del origen. ¿Cuál es su posición s(t), en metros?

$$v(t) = 6t$$
$$s(0) = 4$$

A) s(t) = 3t² + 4 **B)** s(t) = 3t² **C)** s(t) = 6t² + 4



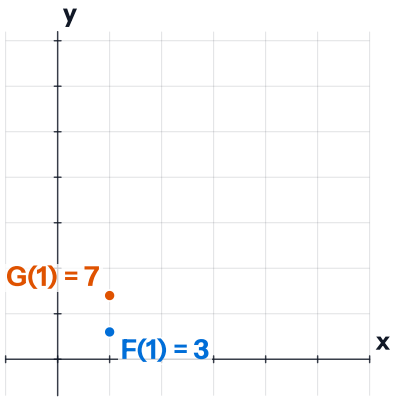
Tu procedimiento

6 NIVEL MEDIO

F y G son antiderivadas de f(x) = 2x. Se sabe que F(1) = 3 y G(1) = 7. ¿Cuánto vale G(5) − F(5)?

$$F(1) = 3$$
$$G(1) = 7$$

A) 4 **B)** −4 **C)** 20

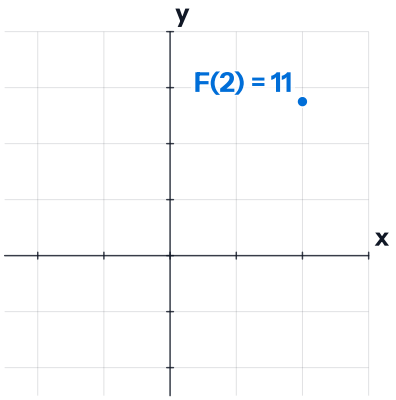


Tu procedimiento

7 NIVEL MEDIO

F es la antiderivada de $f(x) = 3x^2$ que cumple $F(2) = 11$. ¿Cuánto vale $F(-1)$?

A) −1 **B)** 4 **C)** 2

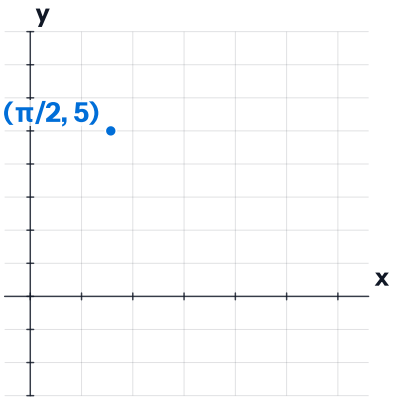


Tu procedimiento

8 NIVEL DIFÍCIL

La pendiente de una curva es $2 \cos x$ en cada punto, y la curva pasa por el punto $(\pi/2, 5)$. ¿Cuál es su ecuación?

A) $y = 2 \operatorname{sen} x + 5$ **B)** $y = 2 \operatorname{sen} x + 3$ **C)** $y = -2 \operatorname{sen} x + 7$

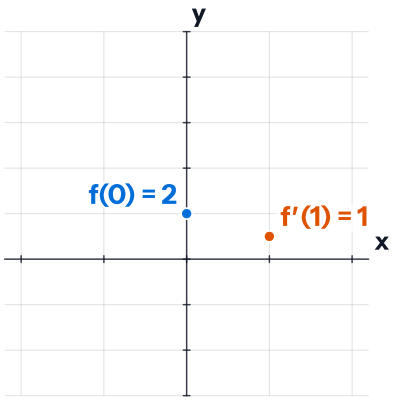


Tu procedimiento

9 NIVEL DIFÍCIL

Una función cumple $f''(x) = 6x$, $f'(1) = 1$ y $f(0) = 2$. ¿Cuál es $f(x)$?

A) $x^3 - 2x + 2$ **B)** $x^3 + x + 2$ **C)** $x^3 - 2x$

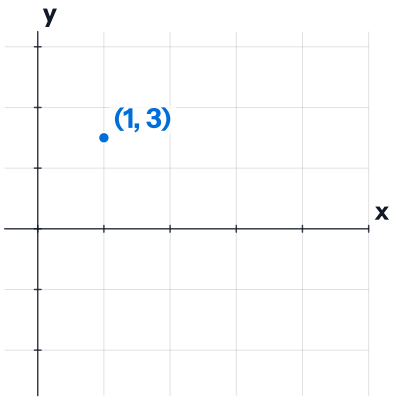


Tu procedimiento

10 NIVEL DIFÍCIL

Una función F cumple $F'(x) = 1/x^2$ para $x > 0$ y $F(1) = 3$. ¿Cuál es $F(x)$?

A) $F(x) = 1/x + 2$ **B)** $F(x) = -1/x + 2$ **C)** $F(x) = -1/x + 4$



Tu procedimiento

Claves y paso a paso

1. Respuesta C · Una antiderivada de f es x² + 7

1. Deriva la opción x² + 7 y compara con f
   $(x^2 + 7)' = 2x + 0$
   $= 2x$
2. Descarta las otras: sus derivadas no dan 2x
   $(2x^2)' = 4x$
   $(2)' = 0$
3. El 7 sobra: cualquier constante funciona
   $x^2,\ x^2 - 3,\ x^2 + 7$

Ojo: 2x² sube el exponente pero no divide entre 2; la opción 2 es la derivada de f, no una antiderivada.
Truco: Para comprobar una antiderivada, derívala: debe dar de vuelta la función original.

2. Respuesta A · La pendiente es 3, sin importar C

1. Deriva la familia: la constante desaparece
   $F'(x) = 3x^2 + 0$
   $F'(x) = 3x^2$
2. Evalúa en x = 1
   $F'(1) = 3(1)^2$
   $F'(1) = 3$
3. Concluye: las tangentes son paralelas
   $m = 3 \text{ para todo } C$

Ojo: 1 es la altura de x³ en x = 1, no su pendiente; 3 + C suma la constante, pero C desaparece al derivar.
Truco: Las antiderivadas de una misma función difieren en una constante: sus pendientes coinciden en cada x.

3. Respuesta B · Todas las antiderivadas son sen x + C

1. Comprueba que sen x es antiderivada
   $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$
2. Sumar una constante no cambia la derivada
   $(\operatorname{sen} x + C)' = \cos x + 0$
3. Escribe la familia completa
   $F(x) = \operatorname{sen} x + C$

Ojo: sen x es una sola antiderivada, no la familia; −sen x + C confunde integrar con derivar cos x.
Truco: La integral indefinida es una familia de curvas: siempre incluye la constante C.

4. Respuesta B · La curva es y = x² − 4x + 5

1. Integra la pendiente y deja la constante
   $y = x^2 - 4x + C$
2. Sustituye el punto (3, 2)
   $3^2 - 4(3) + C = 2$
   $-3 + C = 2$
3. Despeja C
   $C = 2 + 3 = 5$
4. Escribe la ecuación completa
   $y = x^2 - 4x + 5$

Ojo: +2 toma C igual a la altura 2; −1 suma −3 a 2 en vez de pasar el −3 sumando al otro lado.
Truco: Una condición inicial fija C: sustituye el punto en la familia y despeja.

5. Respuesta A · La posición es s(t) = 3t² + 4 metros

1. La posición es una antiderivada de la velocidad
   $s(t) = 3t^2 + C$
2. Usa la posición inicial para hallar C
   $s(0) = 3(0)^2 + C = 4$
   $C = 4$
3. Escribe la posición completa
   $s(t) = 3t^2 + 4$

Ojo: 3t² ignora la posición inicial (C = 0); 6t² + 4 integra 6t sin dividir entre el nuevo exponente 2.
Truco: Posición inicial = condición inicial: fija la constante de integración de la velocidad.

6. Respuesta A · G(5) − F(5) = 4: la diferencia es constante

1. Escribe las dos familias y fija cada constante
   $F = x^2 + 2,\ \ G = x^2 + 6$
2. En x = 1 la distancia vertical entre las curvas es 4
   $G(1) - F(1) = 7 - 3 = 4$
3. La distancia es la misma en cualquier x
   $G(5) - F(5) = 31 - 27 = 4$

Ojo: −4 resta en el orden contrario; 20 supone que la diferencia crece con x (4 · 5), pero es constante.
Truco: Dos antiderivadas de la misma función siempre difieren en una constante.

7. Respuesta C · Con C = 3, el valor pedido es 2

1. Integra f y deja la constante
   $F(x) = x^3 + C$
2. Usa F(2) = 11 para hallar C
   $2^3 + C = 11$
   $C = 3$
3. Evalúa F en −1
   $F(-1) = (-1)^3 + 3 = 2$

Ojo: Sin sumar C = 3 se queda en −1; 4 toma $(-1)^3$ como +1 y suma 1 + 3.
Truco: Primero la constante, después la evaluación: $F(x) = x^3 + 3$ ya incluye C.

8. Respuesta B · La curva es y = 2 sen x + 3

1. Integra la pendiente
   $y = 2\operatorname{sen} x + C$
2. Evalúa en x = π/2, donde sen(π/2) = 1
   $2(1) + C = 5$
3. Despeja C y escribe la curva
   $C = 5 - 2 = 3$

Ojo: +5 toma C igual a la altura sin restar 2 sen(π/2) = 2; −2 sen x + 7 integra el coseno con signo menos.
Truco: Antes de usar el punto, integra bien: ∫cos x dx = sen x, sin signo menos.

9. Respuesta A · La función es f(x) = x³ − 2x + 2

1. Integra f″ y usa f′(1) = 1 para hallar C_1
   $f'(x) = 3x^2 + C_1$
   $3 + C_1 = 1, \quad C_1 = -2$
2. Integra f′ y deja otra constante
   $f(x) = x^3 - 2x + C_2$
3. Usa f(0) = 2 para hallar C_2
   $0 - 0 + C_2 = 2$
   $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Ojo: $x^3 + x + 2$ toma $C_1 = 1$ sin restar el 3; $x^3 - 2x$ olvida la segunda constante.
Truco: Cada integración añade una constante: con f″ necesitas dos condiciones.

10. Respuesta C · La función es F(x) = 4 − 1/x

1. Reescribe 1/x² como potencia e integra
   $\int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-1}}{-1}$
   $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C$
2. Usa F(1) = 3 para hallar C
   $-1 + C = 3$
   $C = 4$
3. Escribe la función completa
   $F(x) = -\dfrac{1}{x} + 4$

Ojo: 1/x + 2 pierde el signo menos al integrar x^{-2}; −1/x + 2 resta mal: toma C = 3 − 1.
Truco: Al integrar x^{-n}, divide entre el nuevo exponente (negativo): el signo menos aparece.